

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación —
IIC2214 — Teoría de la Computación —

Guia Complejidad

1. Sea K un lenguaje sobre Σ. Demuestre que si $K \in \mathrm{P}$, entonces $K \leq_p L$, para todo lenguaje L sobre Σ tal que $L \neq \emptyset$ y $L \neq \Sigma^*$.

2. Demuestre que P = NP si y sólo si existe un lenguaje finito que es NP-completo.

3. ¿Es cierto que si $L_1 \cap L_2$ está en NP, entonces L_1 y L_2 están en NP?

4. ¿Es cierto que si $L_1 \cup L_2$ está en NP, entonces L_1 o L_2 están en NP?

5. Asuma que P $\neq$ NP. ¿Es cierto que si L_1 y L_2 son NP-completos, entonces $L_1 \cap L_2$ es NP-completo?

6. Demuestre que P $\subseteq$ NP $\cap$ co-NP.
(recuerde que co-NP contiene los lenguajes cuyo complemento está en NP.)

7. Demuestre que los siguientes problemas son NP-completos:

   (a) Double-SAT = $\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ fórmula proposicional satisfacible por al menos 2 valuaciones$\}$.

   (b) Non-Equiv = $\{\langle\varphi, \psi\rangle \mid \varphi$ y ψ fórmulas proposicionales no equivalentes$\}$.

8. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un *independiente* en G es un subconjunto de nodos $I \subseteq V$ tal que para todo par $u \neq v$ en I, se tiene $\{u, v\} \notin E$. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

   Independent-Set = $\{\langle G, k\rangle \mid G$ grafo que tiene un independiente de k nodos$\}$.

9. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

   Half-Clique = $\{\langle G\rangle \mid G$ grafo con n nodos que tiene un clique de $\lceil n/2 \rceil$ nodos$\}$.

10. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un *dominating set* en G es un subconjunto de nodos $D \subseteq V$ tal que para todo $v \in V \setminus D$, existe una arista entre v y algún nodo de D. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

    Dominating-Set = $\{\langle G, k\rangle \mid G$ grafo que tiene un dominating set de k nodos$\}$.

    (*Hint*: haga una reducción desde Vertex-Cover.)

11. Sean $G = (V, E)$ y $H = (W, F)$ dos grafos. Un *isomorfismo* de G a H es una biyección $f : V \to W$ tal que para todo par $u, v \in V$ se tiene:

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in F.$$

Decimos que G y H son isomorfos si existe un isomorfismo de G a H. Intuitivamente, dos grafos son isomorfos si son el mismo grafo, después de renombrar nodos. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

$$\text{Sub-Iso} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ tiene un subgrafo que es isomorfo a } H\}.$$

12. ¿Qué sucede en el problema anterior si H es un grafo fijo? Es decir, qué sucede con el problema:

$$\text{Sub-Iso}_H = \{\langle G\rangle \mid G \text{ tiene un subgrafo que es isomorfo a } H\}$$

para un grafo cualquiera H.

13. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

$$\text{Partition} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ multi-conjunto de numeros naturales, existe } S \subseteq A \text{ tal que } \sum_{s\in S} s = \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a\}.$$

(*Hint*: haga una reducción desde Subset-Sum.)

14. Sea un multi-conjunto de números naturales A. Un (b, k)-*bin-packing* de A, donde $b, k \geq 1$, es una partición de A en b subconjuntos tal que la suma de cada parte de la partición es a lo más k. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

$$\text{Bin-Packing} = \{\langle A, b, k\rangle \mid A \text{ multi-conjunto de numeros naturales, existe un } (b, k)\text{-bin-packing de } A\}.$$

(*Hint*: haga una reducción desde Partition.)

15. Sea una fórmula φ en 3-CNF. Decimos que una valuación σ es *completa* si cada cláusula de φ tiene dos literales ℓ y ℓ' tal que $\sigma(\ell) = 1$ y $\sigma(\ell') = 0$. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

$$\text{NAE-3-SAT} = \{\langle \varphi\rangle \mid \varphi \text{ fórmula proposicional que tiene una valuación completa}\}.$$

16. Un 3-hipergrafo es un par $H = (V, E)$, donde V es un conjunto finito (el conjunto de nodos), y E es un colección de subconjuntos de V tal que cada subconjunto tiene tamaño a lo más 3. (el conjunto de hiperaristas). Un 2-coloreo para H es una forma de pintar los nodos con 2 colores tal que ninguna hiperarista queda pintada del mismo color. Formalmente, un 2-coloreo para $H = (V, E)$ es una función $c : V \to \{1, 2\}$ tal que para cada hiperarista $e \in E$, existen $u, v \in e$ con $c(u) \neq c(v)$. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo:

$$\text{Hiper-2-Col} = \{\langle H\rangle \mid H \text{ es un 3-hipergrafo que tiene un 2-coloreo}\}.$$

17. En clases demostramos que Subset-Sum es NP-completo, asumiendo que codificamos cada número del problema en base 10. ¿Sigue siendo NP-completo si usamos base 2? ¿Qué pasa si usamos base 1 o notación unaria (es decir, n se escribe como una palabra $1 \cdots 1$ de largo n)? ¿Sigue funcionando la reducción?