

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación —
IIC2214 — Teoría de la Computación —

TAREA 5

1er semestre 2025

Pregunta 1

Sea Σ una teoría. Demuestre que Σ es completa si y sólo si para todo par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se cumple que:

$$\mathfrak{A} \models \Sigma \text{ y } \mathfrak{B} \models \Sigma \implies \mathfrak{A} \text{ y } \mathfrak{B} \text{ son elementalmente equivalentes.}$$

Solución

($\Rightarrow$)
Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras arbitrarias tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\mathfrak{B} \models \Sigma$. Debemos demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes. Sea φ una oración arbitraria. Debemos demostrar que

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$$

Esto es equivalente a:

$$\mathfrak{A} \not\models \varphi \iff \mathfrak{B} \not\models \varphi$$

Supongamos que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ (la otra dirección es simétrica). Como $\mathfrak{A} \models \Sigma$, tenemos que $\varphi \notin \Sigma$. Por completitud de Σ, sigue que $\neg\varphi \in \Sigma$. Como $\mathfrak{B} \models \Sigma$, obtenemos que $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, es decir, $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

($\Leftarrow$)
Debemos demostrar que Σ es completa. Por contradicción, supongamos que existe una oración φ tal que $\varphi \notin \Sigma$ y $\neg\varphi \notin \Sigma$. Como toda teoría es cerrada bajo consecuencia lógica, esto es equivalente a $\Sigma \not\models \varphi$ y $\Sigma \not\models \neg\varphi$. Por definición de consecuencia lógica, existe una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, y existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y $\mathfrak{B} \not\models \neg\varphi$. Obtenemos dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\mathfrak{B} \models \Sigma$, pero que no son elementalmente equivalentes ya que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$. Esto contradice nuestra hipótesis.

Distribución de puntajes:

- 3.0 pts por la dirección $\Rightarrow$ del si y sólo si. Descuentos a criterios del corrector en caso de errores y/o argumentos poco claros.
- 3.0 pts por la dirección $\Leftarrow$ del si y sólo si. Descuentos a criterios del corrector en caso de errores y/o argumentos poco claros.

Pregunta 2

Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, con E relación binaria. Definimos la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_{\text{fin-degree}} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un elemento con grado de salida finito}\}.$$

Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, el *grado de salida* de un elemento $a \in A$, es la cardinalidad del conjunto $N_{\text{out}}(a)$, donde

$$N_{\text{out}}(a) = \{b \in A \mid (a, b) \in E^{\mathfrak{A}}\}.$$

Si vemos $\mathfrak{A}$ como un grafo dirigido (potencialmente infinito), el grado de salida de a es la cantidad de elementos que son apuntados por a.

Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{fin-degree}}$ no es definible en lógica de primer orden.

Solución

Por contradicción, supongamos que existe una oración φ que define $\mathcal{P}_{\text{fin-degree}}$. Para cada $n \geq 1$ definamos la oración:

$$\lambda_n = \forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} E(x, y_i) \ \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} y_i \neq y_j \Big)$$

Notar que para toda estructura $\mathfrak{A}$ se cumple:

$$\mathfrak{A} \models \lambda_n \iff \text{todo elemento de } \mathfrak{A} \text{ tiene grado de salida al menos } n.$$

Esto implica que para toda estructura $\mathfrak{A}$ se cumple:

$$\mathfrak{A} \models \{\lambda_n \mid n \geq 1\} \iff \text{todo elemento de } \mathfrak{A} \text{ tiene grado de salida infinito.}$$

Definamos $\Sigma = \varphi \cup \{\lambda_n \mid n \geq 1\}$. Como φ y $\{\lambda_n \mid n \geq 1\}$ expresan lo contrario, no puede existir $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{A} \models \{\lambda_n \mid n \geq 1\}$. Luego Σ no es satisfacible.
Por otra parte, veamos que Σ es finitamente satisfacible. Sea $\Delta \subseteq \Sigma$ finito. Sigue que existe un $k \geq 1$ tal que $\Delta \subseteq \varphi \cup \{\lambda_n \mid 1 \leq n \leq k\}$. Podemos tomar cualquier estructura donde cada elemento tiene grado de salida exactamente k, por ejemplo $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ tal que:

$$A = \{1, \ldots, k\}$$
$$E^{\mathfrak{A}} = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq k\}$$

Tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi \cup \{\lambda_n \mid 1 \leq n \leq k\}$ y luego $\mathfrak{A} \models \Delta$. Concluimos que Δ es satisfacible, y luego Σ es finitamente satisfacible. Aplicando el teorema de compacidad, concluimos que Σ es satisfacible, lo cual es una contradicción.

Distribución de puntajes:

- 6.0 pts por argumentar correctamente y aplicar correctamente el teorema de compacidad. Descuentos a criterios del corrector en caso de errores y/o argumentos poco claros.