Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación —
IIC2214 — Teoría de la Computación —

TAREA 4

1er semestre 2025

Pregunta 1

En el problema Tiling nos entregan un conjunto finito de *baldosas*. La pregunta es si podemos embaldosar el primer cuadrante del plano utilizando las baldosas (podemos repetir baldosas). Como restricción, en la posición $(0, 0)$ del plano debe ir una baldosa especial del conjunto (la baldosa inicial). Además, algunas baldosas pueden ubicarse contiguamente de manera horizontal y vertical, y otras no. A modo de ejemplo, supongamos que el conjunto de baldosas es $\{0, 1, 2\}$ y 0 es la baldosa inicial. Supongamos también que las parejas de baldosas que se pueden ubicar horizontalmente son

$$H = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$$

y las que se pueden ubicar verticalmente son

$$V = \{(0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\}.$$

Un posible embaldosado de la primera parte del plano puede ser:

$$\begin{array}{cccc} \vdots & & & \iddots \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \cdots$$

Notar como en la posición $(0, 0)$ tenemos a la baldosa inicial 0, y el embaldosado respeta las restricciones horizontales y verticales. Por ejemplo, como $(1, 2) \notin H$, no puede aparecer un 2 a la derecha de un 1, o como $(0, 1) \notin V$, no puede aparecer un 1 arriba de un 0.

Formalmente, un *sistema de baldosas* es una tupla $\mathcal{D} = (D, d_0, H, V)$ donde D es un conjunto finito (el conjunto de baldosas), $d_0 \in D$ (la baldosa inicial), y $H, V \subseteq D \times D$ son las relaciones de compatibilidad horizontal y vertical, respectivamente. Un *embaldosado* por $\mathcal{D}$ es una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ tal que:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= d_0 \\ (f(m,n), f(m+1,n)) &\in H \qquad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N} \\ (f(m,n), f(m,n+1)) &\in V \qquad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Definimos el lenguaje:

$$\text{Tiling} = \{\langle \mathcal{D} \rangle \mid \mathcal{D} \text{ es un sistema de baldosas tal que existe un embaldosado por } \mathcal{D}\}.$$

Demuestre que Tiling es indecidible.

Hint: Considere demostrar que $\overline{\text{Halting}}_\varepsilon \leq_m \text{Tiling}$. Es decir, para una MT arbitraria M, construya un sistema de baldosas $\mathcal{D}_M$ tal que

$$M \text{ no se detiene con } \varepsilon \iff \text{existe un embaldosado por } \mathcal{D}_M.$$

La idea es que el eje horizontal del plano corresponde a las posiciones de la cinta, y el eje vertical a los pasos de M. Note que el conjunto de baldosas D puede ser cualquier conjunto finito que le acomode.

Solución

Esta solución sigue la idea presentada en el hint. Sea M una MT dada. Construiremos un sistema de baldosas $\mathcal{D}_M = (D, d_0, H, V)$ que cumple lo pedido, es decir:

$$M \text{ no se detiene con } \varepsilon \iff \text{existe un embaldosado por } \mathcal{D}_M.$$

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$. El conjunto de baldosas D de $\mathcal{D}_M$ contiene las siguientes 4 baldosas

$$\boxed{a} \quad \boxed{{}_{\mathrm{q}}a} \quad \boxed{\overset{\mathrm{q}}{a}} \quad \boxed{a_{\mathrm{q}}}$$

para cada símbolo $a \in \Gamma$ y cada estado $q \in Q$. El objetivo es que un embaldosado por $\mathcal{D}_M$ codifique la ejecución de M con ε, por lo que la franja horizontal a la altura t representará cómo se ve la cinta en la ejecución de M en el tiempo t. Dentro de cada franja horizontal, la baldosa $\overset{\mathrm{q}}{a}$ indica la posición en el que está la cabeza lectora y el estado actual de M, y las baldosas a_{q} y ${}_{\mathrm{q}}a$ representan los símbolos a la izquierda y derecha de la cabeza lectora respectivamente.
Para forzar que cada franja horizontal codifique una configuración de M, agregamos las siguientes restricciones horizontales a H

$$\{(a,b), (a,b_{\mathrm{q}}), (a_{\mathrm{q}}, \overset{\mathrm{q}}{b}), (\overset{\mathrm{q}}{a}, {}_{\mathrm{q}}b), ({}_{\mathrm{q}}a, b)\}, \tag{1}$$

para cada $a, b \in \Gamma$ y cada $q \in Q$. Con estas restricciones forzamos a que si a_{q}, $\overset{\text{q}}{b}$ y ${}_{\text{q}}c$ aparecen en una franja horizontal para símbolos $a, b, c \in \Gamma$, entonces aparecen de manera consecutiva, y todas las baldosas a la derecha de ${}_{\text{q}}a$ y a la izquierda de a_{q} (si es que hay), son de la forma d, para símbolos $d \in \Gamma$. Visualmente:

d_1	$\cdots$	d_ℓ	a_{q}	$\overset{\text{q}}{b}$	${}_{\text{q}}c$	e_1	$\cdots$

Utilizando las restricciones verticales, debemos asegurar que las franjas en el tiempo t y $t+1$ correspondan a configuraciones consecutivas de la MT M. Primero, debemos asegurar que en las posiciones donde **no** está la cabeza, el símbolo en esa posición no se ve alterado entre el tiempo t y $t+1$. Para eso agregamos las siguientes restricciones a V

$$\{(a,a),(a,a_{\text{q}}),(a,\overset{\text{q}}{a}),(a,{}_{\text{q}}a),(a_{\text{q}},a),(a_{\text{q}},a_{\text{p}}),(a_{\text{q}},\overset{\text{p}}{a}),(a_{\text{q}},{}_{\text{p}}a),({}_{\text{q}}a,a),({}_{\text{q}}a,a_{\text{p}}),({}_{\text{q}}a,\overset{\text{p}}{a}),({}_{\text{q}}a,{}_{\text{p}}a)\},$$

para cada $a \in \Gamma$ y cada $q, p \in Q$. En otras palabras, para cada baldosa que mencione el símbolo a, excepto $\overset{\text{q}}{a}$ que corresponde a la cabeza, la baldosa que está arriba puede ser cualquier tipo de baldosa pero debe mencionar el mismo símbolo a.
Ahora debemos asegurarnos de que las franjas en el tiempo t y $t+1$ respetan la función de transición δ. Para cada $a \in \Gamma$ y $q \in \Gamma$:

- Si $\delta(q,a) = (p,b,\triangleright)$, entonces agregamos la restricción $(\overset{\text{q}}{a}, b_{\text{p}})$ a V.
- Si $\delta(q,a) = (p,b,\triangleleft)$, entonces agregamos la restricción $(\overset{\text{q}}{a}, {}_{\text{p}}b)$ a V.

Finalmente debemos forzar a que el embaldosado comience en la configuración inicial de M sobre ε. Para esto utilizaremos la baldosa inicial de $\mathcal{D}_M$. Agregamos al conjunto de baldosas D, dos baldosas \$ y #. La baldosa inicial es \$. Agregamos las restricciones horizontales $\{(\$,\#),(\#,\#)\}$ a H. Agregamos las restricciones verticales $\{(\$, \vdash {}_{q_0}),(\#,\texttt{B}),(\#,\overset{q_0}{\texttt{B}}),(\#,{}_{q_0}\texttt{B})\}$ a V, donde $\vdash$ es el símbolo inicio, B el símbolo blanco y q_0 el estado inicial de M.
Juntando todas las restricciones anteriores, cualquier embaldosado de $\mathcal{D}_M$ debe comenzar con la siguiente franja horizontal:

\$	#	#	#	#	$\cdots$

La siguiente franja debe ser:

$\vdash {}_{q_0}$	$\overset{q_0}{\texttt{B}}$	${}_{q_0}\texttt{B}$	B	B	$\cdots$
\$	#	#	#	#	$\cdots$

Esto, debido a que arriba de \$ sólo puede ir $\vdash {}_{q_0}$ y arriba de # sólo puede ir $\overset{q_0}{\texttt{B}}$, ${}_{q_0}\texttt{B}$, o B. Las restricciones horizontales en (1) aseguran que la segunda franja tenga la forma deseada y codifique la configuración inicial. Por construcción de $\mathcal{D}_M$, las siguentes franjas deben corresponder a las siguientes configuraciones de M con ε. A modo de ejemplo, supongamos que $\delta(q_0,\texttt{B}) = (q_1,a,\triangleright)$, luego la tercera franja debe ser:

$\vdash$	${}_{q_1}a$	$\overset{q_1}{\mathtt{B}}$	$\mathtt{B}_{q_1}$	$\mathtt{B}$	$\cdots$
$\vdash_{q_0}$	$\overset{q_0}{\mathtt{B}}$	${}_{q_0}\mathtt{B}$	$\mathtt{B}$	$\mathtt{B}$	$\cdots$
\$	#	#	#	#	$\cdots$

Esto, ya que arriba de $\overset{q_0}{\mathtt{B}}$ sólo puede ir ${}_{q_1}a$ (lo cual simula nuestra transición), y arriba del resto de las baldosas se debe mantener el símbolo. Nuevamente las restricciones horizontales en (1) nos aseguran que la tercera franja tendrá la forma deseada. Siguiendo el mismo razonamiento, si ahora $\delta(q_1, \mathtt{B}) = (q_2, b, \lhd)$, la siguiente franja debe ser:

$\vdash_{q_2}$	$\overset{q_2}{a}$	${}_{q_2}b$	$\mathtt{B}$	$\mathtt{B}$	$\cdots$
$\vdash$	${}_{q_1}a$	$\overset{q_1}{\mathtt{B}}$	$\mathtt{B}_{q_1}$	$\mathtt{B}$	$\cdots$
$\vdash_{q_0}$	$\overset{q_0}{\mathtt{B}}$	${}_{q_0}\mathtt{B}$	$\mathtt{B}$	$\mathtt{B}$	$\cdots$
\$	#	#	#	#	$\cdots$

Igual que antes, esto se debe a que arriba de $\overset{q_1}{\mathtt{B}}$ sólo puede ir ${}_{q_2}b$, junto con las demás restricciones ya mencionadas. Notar que si no existe transición desde el par (q_2, b), no podemos poner ninguna baldosa arriba de ${}_{q_2}b$, y luego no podemos seguir con nuestro embaldosado.

Tenemos que si M no se detiene con ε, entonces la ejecución de M con ε corresponde a una secuencia infinita de configuraciones partiendo desde la configuración inicial. Podemos tomar el embaldosado que codifica esta ejecución según lo explicado anteriormente. Esto efectivamente es un embaldosado por $\mathcal{D}_M$, ya que cumple todas las restricciones de H y V. Por otra parte, si existe un embaldosado por $\mathcal{D}_M$, por lo discutido arriba, debe codificar la ejecución de M con ε. Como el embaldosado es infinito, sigue que M no se detiene con ε.

Distribución de puntajes:

- 4.0 pts por la construcción del sistema de baldosas. Descuentos a criterio del corrector.
- 2.0 pts por argumentar la correctitud. Descuentos a criterio del corrector.

Pregunta 2

(a) (1.0 pts) Demuestre la equivalencia $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi)$. En esta pregunta debe utilizar la definición inductiva de $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$ dada en clases (slides 27 y 28, clase 10).

(b) (1.0 pts) Sean φ y ψ dos oraciones. ¿Es cierto que si $\varphi \vee \psi$ es satisfacible, entonces φ es satisfacible o ψ es satisfacible? Argumente su respuesta.

(c) (1.0 pts) Sean φ y ψ dos oraciones. ¿Es cierto que si $\varphi \vee \psi$ es válida, entonces φ es válida o ψ es válida? Argumente su respuesta.

(d) Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{P\}$, donde P es un símbolo de relación binaria. Sea φ la oración:

$$\begin{aligned}\varphi = \forall x \exists y\ (P(x,y)) \\ \wedge \forall x \forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)\big) \\ \wedge \forall x (\neg P(x,x)).\end{aligned}$$

(d.1) (1.5 pts) Demuestre que existe una estructura infinita $\mathfrak{A}$ (es decir, cuyo dominio es infinito) tal que φ es verdadera sobre $\mathfrak{A}$.

(d.2) (1.5 pts) Demuestre que φ es falsa sobre toda estructura finita.

Solución

(a) Recordar que $\forall x\ (\varphi \wedge \psi)$ y $(\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi)$ son oraciones, es decir, no tienen variables libres. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura arbitraria con dominio A y σ una asignación. Debemos demostrar que

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \forall x\ (\varphi \wedge \psi) \iff (\mathfrak{A}, \sigma) \models (\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi)$$

Partiremos del lado izquierdo y llegaremos al lado derecho.

$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \forall x\ (\varphi \wedge \psi)$

$\iff$ para todo $a \in A$ se tiene $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \varphi \wedge \psi$. (def. $\forall$)

$\iff$ para todo $a \in A$ se tiene $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \varphi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$. (def. $\wedge$)

$\iff$ para todo $a \in A$ se tiene $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \varphi$ y para todo $a \in A$ se tiene $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$.

$\iff$ $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \forall x\ \varphi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \forall x\ \psi$. (def. $\forall$)

$\iff$ $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi)$. (def. $\wedge$)

(b) Sí, es cierto. Demostremos que si $\varphi \vee \psi$ es satisfacible, entonces φ es satisfacible o ψ es satisfacible.
Supongamos que $\varphi \vee \psi$ es satisfacible. Existe una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi$. Por definición de $\vee$, existe una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ o $\mathfrak{A} \models \psi$. Sigue que existe una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ o existe una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi$. Concluimos que φ es satisfacible o ψ es satisfacible.

(c) No es cierto. Veamos un contraejemplo. Tomemos $\mathcal{L} = \{P\}$ con P relación unaria. Tomemos $\varphi = \forall x\ P(x)$ y $\psi = \neg(\forall x\ P(x))$. Notar que φ no es válida, ya que existen estructuras donde φ es falsa, por ejemplo, $\mathfrak{A} = (\{0\}, \emptyset)$. Similarmente, ψ no es válida, ya que existen estructuras donde ψ es falsa, por ejemplo, $\mathfrak{A} = (\{0\}, \{0\})$. Pero $\varphi \vee \psi$ es válida, ya que para toda estructura φ o ψ debe ser verdadera (una es la negación de la otra).

(d.1) Podemos tomar la estructura infinita $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$. Es decir $P^{\mathfrak{A}}$ es la relación $<$ usual sobre los números naturales. Tenemos que $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y\ (P(x,y))$ ya que para todo natural n

siempre existe un natural m tal que $n < m$. Tenemos que $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z) \big)$ ya que la relación $<$ es transitiva sobre los naturales. Tenemos que $\mathfrak{A} \models \forall x (\neg P(x,x))$ ya que la relación $<$ es anti-refleja. Obtenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(d.2) Sea una estructura finita $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}})$ arbitraria. Demostremos que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Por contradicción, supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi$. Sea $a_0 \in A$ un elemento cualquiera. Como $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y \ (P(x,y))$, deducimos que existe $a_1 \in A$ tal que $(a_0, a_1) \in P^{\mathfrak{A}}$, existe $a_2 \in A$ tal que $(a_1, a_2) \in P^{\mathfrak{A}}$, y así sucesivamente. Es decir, existe una secuencia $a_0, a_1, a_2 \ldots$ de elementos en A tal que para todo $i \geq 0$ se cumple $(a_i, a_{i+1}) \in P^{\mathfrak{A}}$. Como A es finito, estos elementos no pueden ser todos distintos entre ellos, es decir, existen índices $1 \leq i < j$ tal que $a_i = a_j$. Como $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z) \big)$ obtenemos que $(a_i, a_j) \in P^{\mathfrak{A}}$, es decir, $(a_i, a_i) \in P^{\mathfrak{A}}$. Esto implica que $\mathfrak{A} \not\models \forall x (\neg P(x,x))$, y entonces $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, lo cual contradice nuestro supuesto.

Distribución de puntajes:

- (a) 1.0 pts por demostrar la equivalencia utilizando la definición de clases. Descuentos a criterio del corrector.
- (b) 1.0 pts por decir que es cierto y argumentar correctamente. Decir que es cierto sin dar argumentos no recibe puntaje. Descuentos a criterio del corrector.
- (c) 1.0 pts por decir que no es cierto y argumentar correctamente. Decir que no es cierto sin dar argumentos no recibe puntaje. Descuentos a criterio del corrector.
- (d.1) 1.0 pts por dar una estructura infinita correcta y 0.5 pts por argumentar que es correcta.
- (d.2) 1.5 pts por presentar un argumento correcto. Descuentos a criterio del corrector.