Unidad II: Lógica de Primer Orden

Definibilidad de clases de estructuras y compacidad

Clase 12 - Lógica para Ciencia de la Computación/Teoría de la Computación

Prof. Miguel Romero

¿Qué se puede expresar en LPO?

Dos posibles formas de abordar esta pregunta:

Definibilidad sobre una estructura:

Dada una $\mathcal{L}$-estructura fija $\mathfrak{A}$ con dominio A.
¿Qué relaciones sobre A son definibles usando $\mathcal{L}$-fórmulas en LPO?

Ejemplo:

Dada $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}})$:

- ¿Es definible el 0?
- ¿es definible la relación $\leq$?
- ¿es definible la multiplicación?

¿Qué se puede expresar en LPO?

Dos posibles formas de abordar esta pregunta:

Definibilidad de clases de estructuras:

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$ fijo.
¿Qué clases de $\mathcal{L}$-estructuras son definibles con $\mathcal{L}$-oraciones en LPO?

Ejemplo:

Dado el vocabulario de grafos dirigidos $\mathcal{L} = \{E\}$.

- ¿Es definible la clase de grafos que tienen un ciclo dirigido de largo 3?
- ¿la clase de grafos cuyos nodos tienen grado de salida ≤ 2?
- ¿es definible la clase de grafos 3-coloreables?

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario.

Denotamos por $\text{Struct}[\mathcal{L}]$ al conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras.

Definición:

Una **propiedad** $\mathcal{P}$ sobre las $\mathcal{L}$-estructuras es un subconjunto de $\text{Struct}[\mathcal{L}]$.

Ejemplos:

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$, E relación binaria. Posibles propiedades:

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene al menos 2 elementos}\}$.

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un ciclo dirigido de largo 3}\}$.

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene una cantidad infinita de elementos}\}$.

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \text{el grado de salida de cada nodo en } \mathfrak{A} \text{ es } \leq 2\}$.

Definición:

Una propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{L}$-estructuras es **definible** en lógica de primer orden si existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{P}.$$

Ejemplos:

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$, E relación binaria. Posibles propiedades:

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A}$ tiene al menos 2 elementos$\}$.

$$\varphi = \exists x \exists y \ \neg(x = y).$$

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A}$ tiene un ciclo dirigido de largo 3$\}$.

$$\varphi = \exists x \exists y \exists z \ \big(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x)\big).$$

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A}$ tiene una cantidad infinita de elementos$\}$.

$$\varphi = ?$$

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ el grado de salida de cada nodo en $\mathfrak{A}$ es $\leq 2\}$.

$$\varphi = \neg \exists x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_2 \big(\neg y_1 = y_2 \wedge \neg y_2 = y_3 \wedge \neg y_1 = y_3 \\ \wedge E(x,y_1) \wedge E(x,y_2) \wedge E(x,y_3)\big).$$

Definición:

Una propiedad $\mathcal{P}$ es **cerrada bajo isomorfismos** si para todo par de estructuras isomorfas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \iff \mathfrak{B} \in \mathcal{P}.$$

Idea: $\mathcal{P}$ depende sólo de la forma de las estructuras y no de sus dominios.

Todos los ejemplos anteriores son cerrados bajo isomorfismo.
¿Se le ocurre alguna propiedad que no sea cerrada bajo isomorfismo?

Proposición:

Si una propiedad $\mathcal{P}$ es definible en LPO, entonces es cerrada bajo isomorfismos.

Demostración:

Si $\mathcal{P}$ es definible en LPO, existe oración φ tal que para toda estructura $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C} \vDash \varphi \iff \mathfrak{C} \in \mathcal{P}.$$

Por teorema de isomorfismo, para todo par de estructuras isomorfas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff \mathfrak{B} \vDash \varphi.$$

Combinando lo anterior, para todo par de estructuras isomorfas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \iff \mathfrak{B} \in \mathcal{P}.$$

Concluimos que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo isomorfismos.

Proposición:

Si una propiedad $\mathcal{P}$ es definible en LPO, entonces es cerrada bajo isomorfismos.

Corolario:

Si una propiedad $\mathcal{P}$ **no** es cerrada bajo isomorfismos, entonces **no** es definible en LPO.

En general, nos enfocaremos en propiedades cerradas bajo isomorfismos.

Recordatorio: satisfacibilidad de un conjunto de oraciones

Definición:

Un conjunto Σ de $\mathcal{L}$-oraciones es **satisfacible** si **existe** una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$.

Notación:

- Si $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, decimos que $\mathfrak{A}$ es un **modelo** de Σ.
- Σ es satisfacible $=$ Σ es **consistente**.
- Σ **no** es satisfacible $=$ Σ es **inconsistente**.

Definición:

Un conjunto Σ de $\mathcal{L}$-oraciones es **finitamente satisfacible** si **todo** subconjunto finito de Σ es satisfacible.

OJO: Σ es satisfacible $\implies$ Σ es finitamente satisfacible. (¿por qué?)

¿Es cierto que si Σ es finitamente satisfacible, entonces Σ es satisfacible?

Teorema de compacidad:

Sea Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones. Entonces:

$$\Sigma \text{ es satisfacible} \iff \Sigma \text{ es finitamente satisfacible.}$$

Este teorema es una herramienta básica para demostrar que ciertas propiedades **no** son definibles en LPO.

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Considere la propiedad:

$$\mathcal{P}_{\text{fin}} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene una cantidad finita de elementos}\}.$$

Demostremos que $\mathcal{P}_{\text{fin}}$ no es definible en LPO.

Por contradicción, supongamos que existe $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}$$

Para cada $n \geq 2$, definamos la $\mathcal{L}$-oración

$$\lambda_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j \right)$$

Observaciones:

- Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \lambda_n \iff \mathfrak{A} \text{ tiene al menos } n \text{ elementos}$$

- Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \{\lambda_n \mid n \geq 2\} \iff \mathfrak{A} \text{ tiene una cantidad infinita de elementos}$$

Definamos el siguiente conjunto infinito de $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\Sigma = \varphi \cup \{\lambda_n \mid n \geq 2\}.$$

Σ **no** es satisfacible. (¿por qué?)

Definamos el siguiente conjunto infinito de $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\Sigma = \varphi \cup \{\lambda_n \mid n \geq 2\}$$

Veamos que Σ es finitamente satisfacible.

Sea Δ un subconjunto finito de Σ.

Existe un natural $k \geq 2$ tal que:

$$\Delta \subseteq \varphi \cup \{\lambda_n \mid 2 \leq n \leq k\}$$

Si tomamos cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con k elementos, obtenemos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi \cup \{\lambda_n \mid 2 \leq n \leq k\}$, y luego $\mathfrak{A} \vDash \Delta$.

Concluimos que Δ es satisfacible.

Definamos el siguiente conjunto infinito de $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\Sigma = \varphi \cup \{\lambda_n \mid n \geq 2\}.$$

Σ **no** es satisfacible.

Tenemos que Σ es finitamente satisfacible.

Por el teorema de compacidad, Σ es satisfacible. **Contradicción!**

Concluimos que $\mathcal{P}_{\text{fin}}$ no es definible en LPO.

Compacidad y definibilidad: estrategia común

Para demostrar que $\mathcal{P}$ no es definible en LPO:

- Por contradicción, asumir que existe oración φ que define $\mathcal{P}$.
- Diseñar un conjunto infinito de oraciones $\Sigma = \varphi \cup \Gamma$ tal que:
  - Σ **no** es satisfacible. (φ y Γ "expresan lo contrario".)
  - Σ es finitamente satisfacible.
- Por teorema de compacidad, Σ debe ser satisfacible. Contradicción.

Dada una propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{L}$-estructuras, $\overline{\mathcal{P}}$ denota su **complemento**:

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathsf{Struct}[\mathcal{L}] \setminus \mathcal{P}.$$

Proposición:

Si $\mathcal{P}$ es definible en LPO, entonces $\overline{\mathcal{P}}$ es definible en LPO.

Demostración: propuesta.

Como consecuencia obtenemos que la propiedad

$$\mathcal{P}_{\mathsf{inf}} = \{\mathfrak{A} \in \mathsf{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene una cantidad infinita de elementos}\}.$$

no es definible en LPO.

Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{c, d, E\}$ con c y d constantes, y E relación binaria. Definimos la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_{\text{path}} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \text{hay un camino dirigido de } c^{\mathfrak{A}} \text{ a } d^{\mathfrak{A}} \text{ en } \mathfrak{A}\}.$$

Recordatorio:

Un camino dirigido de u a v en $\mathfrak{A}$ es una secuencia $u_0, \ldots u_n$ de elementos de $\mathfrak{A}$ ($n \geq 0$), con $u_0 = u$ y $u_n = v$, tal que:

$$(u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n) \in E^{\mathfrak{A}}$$

En este caso, el largo del camino es n.

Demostremos que $\mathcal{P}_{\text{path}}$ no es definible en LPO.

Por contradicción, supongamos que existe $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{path}}$$

Definimos la $\mathcal{L}$-oración

$$\rho_0 = (\neg\, c = d)$$

y para cada $n \geq 1$, definimos la $\mathcal{L}$-oración

$$\rho_n = \neg\Big(\exists x_1 \cdots \exists x_{n-1}\, \big(E(c, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge E(x_{n-1}, d)\big)\Big)$$

Observaciones:

- Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

  $\mathfrak{A} \vDash \rho_n \iff$ no hay un camino dirigido de $c^{\mathfrak{A}}$ a $d^{\mathfrak{A}}$ en $\mathfrak{A}$ de largo n

- Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

  $\mathfrak{A} \vDash \{\rho_n \mid n \geq 1\} \iff$ no hay un camino dirigido de $c^{\mathfrak{A}}$ a $d^{\mathfrak{A}}$ en $\mathfrak{A}$

Definamos el siguiente conjunto infinito de $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\Sigma = \varphi \cup \{\rho_n \mid n \geq 0\}$$

Σ **no** es satisfacible. (¿por qué?)

Definamos el siguiente conjunto infinito de $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\Sigma = \varphi \cup \{\rho_n \mid n \geq 0\}$$

Veamos que Σ es finitamente satisfacible.

Sea Δ un subconjunto finito de Σ.

Existe un natural $k \geq 1$ tal que:

$$\Delta \subseteq \varphi \cup \{\rho_n \mid 0 \leq n \leq k\}$$

Definamos $\mathfrak{A} = (A, c^{\mathfrak{A}}, d^{\mathfrak{A}}, E^{\mathfrak{A}})$ como:

$$A = \{0, \ldots, k+1\} \qquad c^{\mathfrak{A}} = 0 \qquad d^{\mathfrak{A}} = k+1 \qquad E^{\mathfrak{A}} = \{(i, i+1) \mid 0 \leq i \leq k\}$$

Tenemos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi \cup \{\rho_n \mid 1 \leq n \leq k\}$, y luego $\mathfrak{A} \vDash \Delta$.

Concluimos que Δ es satisfacible.

Definamos el siguiente conjunto infinito de $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\Sigma = \varphi \cup \{\rho_n \mid n \geq 0\}$$

Σ **no** es satisfacible.

Tenemos que Σ es finitamente satisfacible.

Por el teorema de compacidad, Σ es satisfacible. **Contradicción!**

Concluimos que $\mathcal{P}_{\text{path}}$ no es definible en LPO.