Unidad II: Lógica de Primer Orden

Definibilidad sobre una estructura e isomorfismos

Clase 11 - Lógica para Ciencia de la Computación/Teoría de la Computación

Prof. Miguel Romero

¿Qué se puede expresar en LPO?

Dos posibles formas de abordar esta pregunta:

Definibilidad sobre una estructura:

Dada una $\mathcal{L}$-estructura fija $\mathfrak{A}$ con dominio A.
¿Qué relaciones sobre A son definibles usando $\mathcal{L}$-fórmulas en LPO?

Ejemplo:

Dada $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}})$:

- ¿Es definible el 0?
- ¿es definible la relación $\leq$?
- ¿es definible la multiplicación?

¿Qué se puede expresar en LPO?

Dos posibles formas de abordar esta pregunta:

Definibilidad de clases de estructuras:

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$ fijo.
¿Qué clases de $\mathcal{L}$-estructuras son definibles con $\mathcal{L}$-oraciones en LPO?

Ejemplo:

Dado el vocabulario de grafos dirigidos $\mathcal{L} = \{E\}$.

- ¿Es definible la clase de grafos que tienen un ciclo dirigido de largo 3?
- ¿la clase de grafos cuyos nodos tienen grado de salida ≤ 2?
- ¿es definible la clase de grafos 3-coloreables?

Recordatorio:

- Escribimos $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ si las variables libres de φ son $\{x_1, \ldots, x_k\}$.
- Si $(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ y $\sigma(x_i) = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces escribimos $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.
  - Cuando nos convenga, usaremos tuplas $(a_1, \ldots, a_k)$ en vez de asignaciones σ.

Definición:

Sea una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y $S \subseteq A^k$ una relación sobre A de aridad $k \geq 1$. Decimos que S es **definible** en $\mathfrak{A}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ tal que:

$$S = \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_k)\}.$$

Definibilidad sobre una estructura: ejemplos

Defina las siguientes relaciones sobre $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}})$.

- El número 0.

$$\varphi_0(x) = (x + x = x)$$

- La relación menor que $<$.

$$\varphi_<(x, y) = \exists z \ (x + z = y \wedge \neg x = y)$$

- La relación sucesor.

$$\varphi_{suc}(x, y) = \varphi_<(x, y) \wedge \neg \exists z \ (\varphi_<(x, z) \wedge \varphi_<(z, y))$$

- El número 1.

$$\varphi_1(x) = \forall y \ (\varphi_0(y) \rightarrow \varphi_{succ}(y, x))$$

Definibilidad sobre una estructura: ejemplos

Defina las siguientes relaciones sobre $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}})$.

- El número 0.

$$\varphi_0(x) = (x + x = x)$$

- Los reales no negativos.

$$\varphi_{\geq 0}(x) = \exists y \ (y \cdot y = x)$$

- La relación menor o igual que $\leq$.

$$\varphi_{\leq}(x, y) = \exists z \ (\varphi_{\geq 0}(z) \wedge x + z = y)$$

Defina las siguientes relaciones sobre $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{A}})$.

- La multiplicación.

$$\varphi(x, y, z) = ?$$

¿Cómo demostramos que una relación **no** es definible?

Veremos una técnica clásica basada en isomorfismos.

Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{0, suc\}$ donde 0 es constante y suc función unaria.

Sean las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}}, suc^{\mathfrak{A}})$ y $\mathfrak{B} = (B, 0^{\mathfrak{B}}, suc^{\mathfrak{B}})$ tal que:

- $B = \{a\}^*$.
- $0^{\mathfrak{B}} = \varepsilon$.
- $suc^{\mathfrak{B}}(a^n) = a^{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

¿Son similares estas estructuras?

Idea:

Dos estructuras son isomorfas si son idénticas excepto por sus dominios.

Definición:

Sea un vocabulario $\mathcal{L}$ y dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con dominios A y B. Decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **isomorfas**, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe una biyección $h : A \to B$ tal que:

- Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, se tiene $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
- Para cada función n-aria $f \in \mathcal{L}$ y elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, se tiene:

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

- Para cada relación m-aria $R \in \mathcal{L}$ y elementos $a_1, \ldots, a_m \in A$, se tiene:

$$(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (h(a_1), \ldots, h(a_m)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Decimos que la biyección $h : A \to B$ es un **isomorfismo** de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.

Considere las estructuras anteriores $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}}, suc^{\mathfrak{A}})$ y $\mathfrak{B} = (B, 0^{\mathfrak{B}}, suc^{\mathfrak{B}})$:

- $B = \{a\}^*$.
- $0^{\mathfrak{B}} = \varepsilon$.
- $suc^{\mathfrak{B}}(a^n) = a^{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

La biyección $h : \mathbb{N} \to B$ tal que $h(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es un isomorfismo:

- $h(0^{\mathfrak{A}}) = h(0) = a^0 = \varepsilon = 0^{\mathfrak{B}}$.
- $h(suc^{\mathfrak{A}}(n)) = h(n+1) = a^{n+1} = suc^{\mathfrak{B}}(a^n) = suc^{\mathfrak{B}}(h(n))$.

Concluimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas.

Ejercicios propuestos

- Sean $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}})$ y $\mathfrak{B} = (B, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}}, +^{\mathfrak{B}}, <^{\mathfrak{B}})$, donde B es el conjunto de los números pares, $1^{\mathfrak{B}} = 2$ y los demás símbolos se definen de la manera usual.
  ¿Son $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ isomorfos?
- ¿Qué pasa en el caso anterior si agregamos la multiplicación?
- Sea $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, suc^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}} <^{\mathfrak{N}})$ y $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, 0^{\mathfrak{Z}}, 1^{\mathfrak{Z}}, suc^{\mathfrak{Z}}, +^{\mathfrak{Z}}, \cdot^{\mathfrak{Z}}, <^{\mathfrak{Z}})$.
  ¿Son $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{Z}$ isomorfos?
- Sea $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, suc^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}} <^{\mathfrak{R}})$. ¿Son $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{R}$ isomorfos?

Teorema:

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras isomorfas, entonces para cada $\mathcal{L}$-oración φ:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff \mathfrak{B} \vDash \varphi.$$

Consecuencia:

La lógica de primer orden **no** puede distinguir dos estructuras isomorfas.

Teorema de isomorfismo:

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras isomorfas con dominios A y B.
Sea $h : A \to B$ un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, y σ una asignación para $\mathfrak{A}$.
Entonces para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ:

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \varphi \iff (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash \varphi.$$

Usando notación de tuplas:

Si $h : A \to B$ es isomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$,
para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ y $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathfrak{B} \vDash \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_k)).$$

Definibilidad e isomorfismos: proposición clave

Proposición:

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura con dominio A y $S \subseteq A^k$ una relación k-aria sobre A. Si existe un isomorfismo h de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{A}$, y una tupla $(a_1, \ldots, a_k) \in S$ tal que $(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \notin S$, entonces S **no** es definible sobre $\mathfrak{A}$ en LPO.

Demostración:

Por contradicción, asuma que existe fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ que define S sobre $\mathfrak{A}$.

Como $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, tenemos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

Por teorema de isomorfismo, obtenemos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_k))$.

Luego, $(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in S$. Contradicción.

Para demostrar que S **no** es definible sobre $\mathfrak{A}$,
basta encontrar un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$ que **no respeta** S.

Definibilidad e isomorfismos: ejemplo

Veamos que la relación multiplicación M no es definible sobre $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{A}})$.

Definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = 2x$.

- h es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{A}$.
- h no respeta la relación multiplicación M:
  - $(1, 1, 1) \in M$.
  - $(h(1), h(1), h(1)) = (2, 2, 2) \notin M$.

La proposición anterior nos dice que M no es definible sobre $\mathfrak{A}$.

¿Este argumento aplica para $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}})$?

Definibilidad e isomorfismos: ejercicios propuestos

- Demuestre que la suma no es definible en $(\mathbb{R}, \cdot)$.
- Demuestre que la relación $<$ no es definible en $(\mathbb{R}, +)$.
- Demuestre que el único isomorfismo de $(\mathbb{N}, +)$ en $(\mathbb{N}, +)$ es la identidad.
  - ¿Se puede usar el teorema de isomorfismo para mostrar que la multiplicación no es definible en $(\mathbb{N}, +)$?

El teorema de isomorfismo: demostración

Para demostrar el teorema de isomorfismo usaremos inducción.

Sea un vocabulario $\mathcal{L}$ y dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con dominios A y B.

Primero demostraremos el siguiente lemma:

Lema:

Si σ es una asignación para $\mathfrak{A}$ y $h : A \to B$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, entonces $\widehat{h \circ \sigma} = h \circ \hat{\sigma}$.

Recordatorio:

si τ es asignación, $\hat{\tau}$ es su extensión al conjunto de $\mathcal{L}$-términos.

Lema:

Si σ es una asignación para $\mathfrak{A}$ y $h : A \to B$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, entonces $\widehat{h \circ \sigma} = h \circ \hat{\sigma}$.

Demostración:

Por inducción en los $\mathcal{L}$-términos:

- Para cada constante $c \in \mathcal{L}$:

$$\widehat{h \circ \sigma}(c) = c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}}) = h(\hat{\sigma}(c)) = (h \circ \hat{\sigma})(c).$$

- Para cada variable x:

$$\widehat{h \circ \sigma}(x) = (h \circ \sigma)(x) = h(\sigma(x)) = h(\hat{\sigma}(x)) = (h \circ \hat{\sigma})(x).$$

Lema:

Si σ es una asignación para $\mathfrak{A}$ y $h : A \to B$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, entonces $\widehat{h \circ \sigma} = h \circ \hat{\sigma}$.

Demostración:

Por inducción en los $\mathcal{L}$-términos:

- Para cada función n-aria $f \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-términos $t_1, \ldots, t_n$:
  Si $\widehat{h \circ \sigma}(t_i) = (h \circ \hat{\sigma})(t_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{h \circ \sigma}(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f^{\mathfrak{B}}(\widehat{h \circ \sigma}(t_1), \ldots, \widehat{h \circ \sigma}(t_n)) \\
&= f^{\mathfrak{B}}((h \circ \hat{\sigma})(t_1), \ldots, (h \circ \hat{\sigma})(t_n)) \\
&= f^{\mathfrak{B}}(h(\hat{\sigma}(t_1)), \ldots, h(\hat{\sigma}(t_n))) \\
&= h(f^{\mathfrak{A}}(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n))) \\
&= h(\hat{\sigma}(f(t_1, \ldots, t_n))) \\
&= (h \circ \hat{\sigma})(f(t_1, \ldots, t_n))
\end{aligned}$$

Aplicaremos inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas φ:

- Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces:

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash t_1 = t_2 \\
\Longleftrightarrow \\
\hat{\sigma}(t_1) = \hat{\sigma}(t_2) \\
\Longleftrightarrow \\
h(\hat{\sigma}(t_1)) = h(\hat{\sigma}(t_2)) \\
\Longleftrightarrow \\
(h \circ \hat{\sigma})(t_1) = (h \circ \hat{\sigma})(t_2) \\
\Longleftrightarrow \\
\widehat{h \circ \sigma}(t_1) = \widehat{h \circ \sigma}(t_2) \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash t_1 = t_2
\end{gathered}
$$

Aplicaremos inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas φ:

- Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, entonces:

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash R(t_1, \ldots, t_n) \\
\Longleftrightarrow \\
(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}} \\
\Longleftrightarrow \\
(h(\hat{\sigma}(t_1)), \ldots, h(\hat{\sigma}(t_n))) \in R^{\mathfrak{B}} \\
\Longleftrightarrow \\
((h \circ \hat{\sigma})(t_1), \ldots, (h \circ \hat{\sigma})(t_n)) \in R^{\mathfrak{B}} \\
\Longleftrightarrow \\
(\widehat{h \circ \sigma}(t_1), \ldots, \widehat{h \circ \sigma}(t_n)) \in R^{\mathfrak{B}} \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash R(t_1, \ldots, t_n)
\end{gathered}
$$

Aplicaremos inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas φ:

Supongamos que la propiedad se cumple para ψ y θ.

- Si $\varphi = \neg\psi$, entonces:

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \varphi \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{A}, \sigma) \nvDash \psi \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \nvDash \psi \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash \varphi
\end{gathered}
$$

Aplicaremos inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas φ:

Supongamos que la propiedad se cumple para ψ y θ.

- Si $\varphi = \psi \wedge \theta$, entonces:

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \varphi \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \psi \text{ y } (\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \theta \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash \psi \text{ y } (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash \theta \\
\Longleftrightarrow \\
(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash \varphi
\end{gathered}
$$

El teorema de isomorfismo: demostración

Aplicaremos inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas φ:

Supongamos que la propiedad se cumple para ψ y θ.

- Suponga que $\varphi = \exists x\ \psi$.

  Sólo vamos a demostrar una dirección. La otra dirección se demuestra de la misma forma pero considerando h^{-1} en lugar de h.

  Si $(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \varphi$, entonces existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \vDash \psi$.

  Por hipótesis de inducción: Existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{B}, h \circ \sigma[x/a]) \vDash \psi$.

  Tenemos que $h \circ \sigma[x/a] = (h \circ \sigma)[x/h(a)]$.

  Luego, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{B}, (h \circ \sigma)[x/b]) \vDash \psi$.

  Concluimos que $(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \vDash \varphi$.

Esto concluye la demostración del teorema de isomorfismo.
(¿por qué basta tomar $\neg, \wedge$ y $\exists$?)