Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 - Lógica para Ciencias de la Computación
Profesor: Miguel Romero
Ayudantes: Caetano Borges, Valentina Juri

Ayudantía 7
Decidibilidad, teoremas de isomorfismo y compacidad

15 de mayo de 2026

Problema 1

1. Demuestre que la suma no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.
2. Demuestre que el conjunto de los naturales $S = \mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Solución

1. Por contradicción, supongamos que la suma es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ por una fórmula $\varphi(x, y, z)$.

   Recordemos que todo número natural $n \geq 2$ tiene su representación en factores primos: $n = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ para algún $k \geq 1$ con $a_i \geq 0$. Consideremos la función $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

   $$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 2^{a_2} \cdot 3^{a_1} \cdot p_k^{a_k} & \text{si } n = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot p_k^{a_k} \end{cases}$$

   Notemos que h es un isomorfismo:

   - Es biyectiva: es claro que si $h(x) = h(y)$ entonces $x = y$ por lo que es inyectiva; y para $y = 2^{a_2} \cdot 3^{a_1} \cdot p_k^{a_k}$ tenemos que $x = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot p_k^{a_k}$ es tal que $h(x) = y$ por lo que también es sobreyectiva.
   - Respeta la multiplicación. Hay tres casos:
     - Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces $h(x \cdot y) = h(0) = 0 = h(x) \cdot h(y)$
     - Si $x = 1$ o $y = 1$ (sin pérdida de generalidad digamos $y = 1$) entonces $h(x \cdot y) = h(x) = h(x) \cdot h(1) = h(x) \cdot h(y)$.

- Si $x, y \geq 2$ (sin pérdida de generalidad digamos $x \leq y$ entonces

$$\begin{aligned} h(x \cdot y) &= h(2^{a_1+b_1} \cdot 3^{a_2+b_2} \cdots p_k^{a_k+b_k} \cdots p_{k'}^{b_{k'}}) \\ &= 2^{a_2+b_2} \cdot 3^{a_1+b_1} \cdots p_k^{a_k+b_k} \cdots p_{k'}^{b_{k'}} \\ &= 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \cdot 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdots p_k^{b_k} \cdots p_{k'}^{b_{k'}} \\ &= h(x) \cdot h(y) \end{aligned}$$

  Por teorema de isomorfismo, tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi(x, y, z) \iff \mathfrak{A} \models \varphi(h(x), h(y), h(z))$. Sin embargo, para $x = 1, y = 2$ tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi(1, 2, 3)$ pero $\mathfrak{A} \not\models \varphi(h(1), h(2), h(3)) \equiv \varphi(1, 3, 2)$. Concluímos que la suma no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.

2. Supongamos que el conjunto $S = \mathbb{N}$ es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ por una fórmula $\varphi(x)$.

   Consideremos el isomorfismo $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 1$. Es claro que es una biyección, y además respeta $<$: para todo par x, y tal que $x < y$ tenemos que $e^x < e^y$. Por teorema de isomorfismo, tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi(x) \iff \mathfrak{A} \models \varphi(h(x))$. Sin embargo, con $x = 0$ tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi(0)$ pero $\mathfrak{A} \not\models \varphi(h(0)) \equiv \varphi(-1)$. Concluímos que $S = \mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Problema 2 Para cada par de estructuras, determine si son isomorfas o no:

1. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.
2. $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$.
3. $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

Solución

1. No son isomorfas. La idea es capturar la propiedad esencial que diferencia a estas dos estructuras, que en este caso es el hecho de que en los naturales no hay inverso aditivo. Consideremos la oración

$$\varphi = \exists x \exists y (x + x \neq x \wedge y + y \neq y \wedge x + y + x + y = x + y)$$

   Esta fórmula representa que existen dos elementos distintos de 0 que sumados dan 0. Tenemos que $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi$ pero $\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \varphi$, por lo que no puede existir un isomorfismo entre las estructuras, o contradeciría al teorema de isomorfismo.

2. No son isomorfas. En este caso la propiedad esencial es que en los naturales los elementos pueden tener a lo más una raíz cuadrada, mientras que en los enteros pueden tener dos (positiva y negativa). Consideremos la oración

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge y \cdot y = x \wedge z \cdot z = x)$$

   Tenemos que $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle \models \varphi$ pero $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle \not\models \varphi$, con lo que las estructuras no son isomorfas.

3. Sí son isomorfas. Consideremos la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $h(x) = e^x$. Es claro que es una biyección, y además tenemos que $h(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = h(x) \cdot h(y)$, con lo que es un isomorfismo.

Problema 3 Decimos que un grafo $G = (N, E)$ contiene un camino dirigido de c a d si existen nodos $a_1, \dots a_n \in N (n \geq 1)$ tal que para todo $i \in [1, n-1]$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in E$ y además $a_1 = c$ y $a_n = d$. Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{c, d, E\}$ con c, d constantes y E una relación binaria. Demuestre que la siguiente propiedad no es definible en LPO:

$$\mathcal{P}_{\text{path}} = \left\{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ contiene un camino dirigido de } c^{\mathfrak{A}} \text{ a } d^{\mathfrak{A}}\right\}$$

Solución

Demostraremos por contradicción. Supongamos que existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se cumple que

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{path}}$$

Construiremos un conjunto de oraciones Σ no satisfacible que contenga a φ. Consideremos la fórmula

$$\rho_n = \neg(\exists x_1 \dots \exists x_{n-1}(E(c, x_1) \wedge \dots \wedge E(x_{n-1}, d)))$$

esto es, $\mathfrak{A} \models \rho_n \iff$ no existe un camino dirigido de c a d de largo n. Con ello, tenemos que $\mathfrak{A} \models \{\rho_n \mid n \geq 1\} \iff$ no existe un camino dirigido de c a d en $\mathfrak{A}$.

Consideremos ahora el conjunto $\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\rho_n \mid n \geq 1\}$. Claramente es inconsistente. Sin embargo, es finitamente satisfacible, ya que para cualquier subconjunto finito de oraciones $\Delta \subseteq \Sigma$ tendremos que $\Delta \subseteq \{\varphi\} \cup \{\rho_n \mid 1 \leq n \leq k\}$ para algún $k \geq 1$. Así, podemos crear una estructura $\mathfrak{B}$ que tenga un camino dirigido de c a d de longitud $k+1$, y será tal que $\mathfrak{B} \models \Delta$, con lo que Σ es finitamente satisfacible.

Por teorema de compacidad tenemos entonces que Σ es satisfacible, lo que es una contradicción. Concluímos que $\mathcal{P}_{\text{path}}$ no es definible en LPO.

Problema 4 Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, con E relación binaria. Definimos la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_{\text{fin-degree}} = \{\mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un elemento con grado de salida finito }\}.$$

Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, el grado de salida de un elemento $a \in A$, es la cardinalidad del conjunto $N_{\text{out}}(a)$, donde

$$N_{\text{out}}(a) = \left\{b \in A \mid (a, b) \in E^{\mathfrak{A}}\right\}.$$

Si vemos $\mathfrak{A}$ como un grafo dirigido (potencialmente infinito), el grado de salida de a es la cantidad de elementos que son apuntados por a. Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{fin-degree}}$ no es definible en lógica de primer orden.

Solución

Se demuestra nuevamente por contradicción con teorema de compacidad. La idea es análoga al problema anterior; solo cambia el conjunto Σ que planteamos. Nótese que ahora tenemos que ser cuidadosos con especificar que todos los elementos son distintos (para que cuenten para el grado de salida). Consideremos la fórmula definida para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\rho_n = \neg(\exists x \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \forall z(& \\ & \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} y_i \neq y_j \wedge \\ & E(x, y_i) \wedge \\ & \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} z \neq y_i \right) \rightarrow \neg E(x, z) \right) \\ ))\end{aligned}$$

que expresa que no existe ningún elemento con grado de salida exactamente n. Definimos el caso especial de $n = 0$ como

$$\rho_0 = \forall x \forall y (\neg E(x, y))$$

Finalmente, definimos $\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\rho_n \mid n \geq 0\}$. Tenemos que Σ es inconsistente; sin embargo, si tomamos cualquier subconjunto finito $\Delta \subseteq \Sigma$ tendremos que

$$\Delta \subseteq \{\varphi\} \cup \{\rho_n \mid 0 \leq n \leq k\} \text{ para algún } k \geq 0$$

Luego, podemos construir una estructura $\mathfrak{B}$ que tenga un elemento con grado de salida $k+1$, y tendremos que $\mathfrak{B} \models \Delta$. Con ello, todo Δ es satisfacible, con lo que Σ es finitamente satisfacible.

Por teorema de compacidad, Σ es satisfacible, lo que es una contradicción. Concluímos que $\mathcal{P}_{\text{fin-degree}}$ no es definible en LPO.