Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 - Lógica para Ciencias de la Computación
Profesor: Miguel Romero
Ayudantes: Caetano Borges, Valentina Juri

Ayudantía 7
Lógica de primer orden

15 de mayo de 2026

Problema 1

1. Demuestre que la suma no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.
2. Demuestre que el conjunto de los naturales $S = \mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Problema 2 Para cada par de estructuras, determine si son isomorfas o no:

1. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.
2. $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$.
3. $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

Problema 3 Decimos que un grafo $G = (N, E)$ contiene un camino dirigido de c a d si existen nodos $a_1, \dots a_n \in N (n \geq 1)$ tal que para todo $i \in [1, n-1]$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in E$ y además $a_1 = c$ y $a_n = d$. Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{c, d, E\}$ con c, d constantes y E una relación binaria. Demuestre que la siguiente propiedad no es definible en LPO:

$$\mathcal{P}_{\text{path}} = \left\{ \mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ contiene un camino dirigido de } c^{\mathfrak{A}} \text{ a } d^{\mathfrak{A}} \right\}$$

Problema 4 Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, con E relación binaria. Definimos la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_{\text{fin-degree}} = \{ \mathfrak{A} \in \text{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un elemento con grado de salida finito } \}.$$

Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, el grado de salida de un elemento $a \in A$, es la cardinalidad del conjunto $N_{\text{out}}(a)$, donde

$$N_{\text{out}}(a) = \left\{ b \in A \mid (a, b) \in E^{\mathfrak{A}} \right\}.$$

Si vemos $\mathfrak{A}$ como un grafo dirigido (potencialmente infinito), el grado de salida de a es la cantidad de elementos que son apuntados por a. Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{fin-degree}}$ no es definible en lógica de primer orden.