Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 - Lógica para Ciencias de la Computación
Profesor: Miguel Romero
Ayudantes: Caetano Borges, Valentina Juri

Ayudantía 6
Lógica de primer orden

8 de mayo de 2026

Problema 1 Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ un vocabulario utilizado para representar grafos dirigidos. Para cada una de las siguientes propiedades, escriba una $\mathcal{L}$-oración que la represente:

1. El grafo contiene un ciclo dirigido de largo 3.
2. Existe un nodo que no es alcanzable desde ningún otro nodo.
3. Existe un nodo en el grafo que está a distancia exactamente 2 de otro nodo.
4. Desde cualquier nodo del grafo podemos alcanzar cualquier otro nodo en a lo más 3 pasos.

Problema 2 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

1. $\{\forall x \exists y R(x, y)\} \models \exists x \forall y R(x, y)$
2. $\{\exists x \forall y R(x, y)\} \models \forall x \exists y R(x, y)$
3. $\{\exists x P(x), \exists y Q(y)\} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
4. $\{\forall x \exists y S(x, y)\} \models \exists y S(y, y)$

Problema 3 Sean φ y ψ dos oraciones.

1. ¿Es cierto que si $\varphi \vee \psi$ es satisfacible, entonces φ es satisfacible o ψ es satisfacible?
2. ¿Es cierto que si $\varphi \vee \psi$ es válida, entonces φ es válida o ψ es válida?

Problema 4 Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{P\}$, donde P es un símbolo de relación binaria. Sea φ la oración:

$$\begin{aligned}\varphi = &\forall x \exists y (P(x, y)) \\ &\wedge \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \\ &\wedge \forall x (\neg P(x, x)).\end{aligned}$$

1. Demuestre que existe una estructura infinita $\mathfrak{A}$ (es decir, cuyo dominio es infinito) tal que φ es verdadera sobre $\mathfrak{A}$.
2. Demuestre que φ es falsa sobre toda estructura finita.