Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 - Lógica para Ciencias de la Computación
Profesor: Miguel Romero
Ayudantes: Caetano Borges, Valentina Juri

# Ayudantía 4
# Enumeradores, decibilidad y computabilidad

10 de abril de 2026

---

**Problema 1** Demuestre que todo lenguaje finito $L = \{w_1, \ldots, w_k\}$ es decidible.

**Problema 2** Sean $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ dos alfabetos finitos. Decimos que una función $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ es computable si existe una MT (modelo determinista con 1 cinta) $M = (Q, \Sigma_1, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$, donde $\Sigma_2 \subseteq \Gamma$, tal que para toda entrada $w \in \Sigma_1^*$, la ejecución $\rho = C_0, \ldots, C_m$ de $M$ sobre $w$ es finita y $C_m = \vdash q_f h(w)$. Note que esta es la misma definición de computar funciones de la tarea 1, con la salvedad que la MT tiene una sola cinta y las palabras en el dominio y rango de la función pueden estar sobre alfabetos distintos.

1. Sean $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ dos alfabetos finitos. Decimos que $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ es un homomorfismo si:
   - $h(\varepsilon) = \varepsilon$.
   - Para todo par de palabras $u, v \in \Sigma_1^*$, se cumple que $h(uv) = h(u)h(v)$.

   Demuestre que todo homomorfismo es computable.
2. Sean $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ alfabetos finitos. Demuestre que si $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ y $g : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ son computables, entonces la composición $g \circ f$ es computable.

**Problema 3** Demuestre que $L$ es decidible si y solo si existe una MT enumeradora $E$ que enumera $L$ en orden lexicográfico.

Dado un alfabeto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, donde asumimos un orden $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$; $w' = w'_1 \ldots w'_p$ es lexicográficamente mayor que $w = w_1 \ldots w_q$ si $p > q$, o $p = q$ y $w'_i > w_i$ donde $i \in \{1, \ldots, p\}$ es la primera posición donde $w'_i \neq w_i$. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$, donde $a < b < c < d$, las siguientes palabras están en orden lexicográfico, de menor a mayor: $\epsilon, a, b, d, aa, ab, bc, aba, bca, bda, bdd, cca, daa, aaaa$.

**Problema 4** Demuestre que todo lenguaje infinito recursivamente enumerable $L$ tiene un subconjunto $L' \subseteq L$ tal que $L'$ es infinito y decidible.

**Problema 5** Sea un lenguaje $L$ sobre alfabeto $\Sigma$. Definimos el lenguaje prefijo de $L$ como:

$$\text{prefix}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ existe } z \in \Sigma^* \text{ tal que } wz \in L\}$$

Demuestre que si $L$ es recursivamente enumerable, entonces prefix$(L)$ también lo es.