

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 - Lógica para Ciencias de la Computación
Profesor: Miguel Romero
Ayudantes: Caetano Borges, Valentina Juri

Ayudantía 2
MTs de múltiples cintas y equivalencias

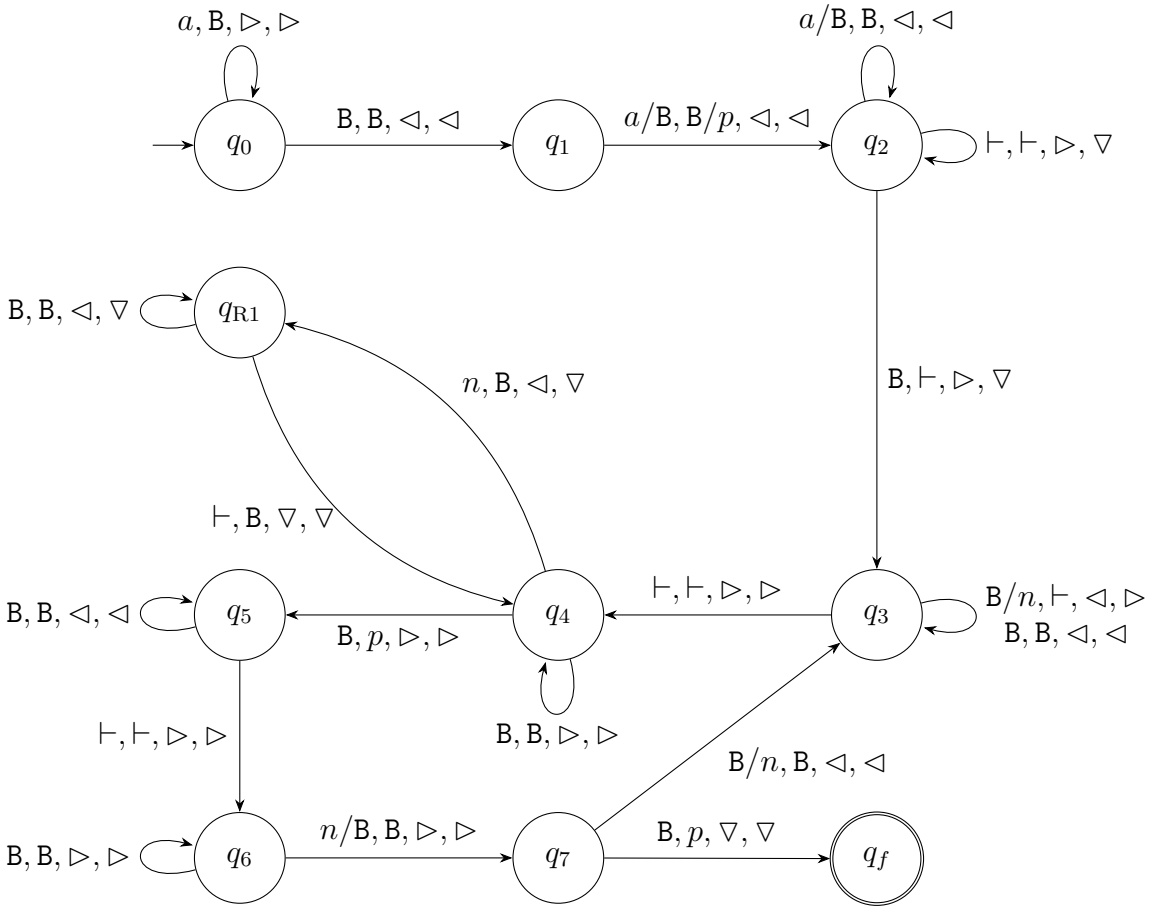
20 de marzo de 2026

Problema 1 Entregue una descripción formal de una MT que acepte el siguiente lenguaje $L = \{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ es un número primo}\}$. Puede usar múltiples cintas.

Solución Usaremos dos cintas. La idea será probar todos los naturales n tales que $2 \leq n \leq p$ y ver si dividen a p. Por cada n, recorreremos la cinta revisando todos los múltiplos de n que sean menores o iguales a p, con el objetivo de ver si p es múltiplo de n. Si nos pasamos de p sin haberlo revisado como múltiplo, significa que no es divisible por n, y pasaremos al siguiente natural. Usaremos la primera cinta para marcar en que n vamos, y la segunda para ir revisando los múltiplos. Más formalmente, sobre cualquier entrada $w \in \{a\}^*$, nuestra MT hace lo siguiente:

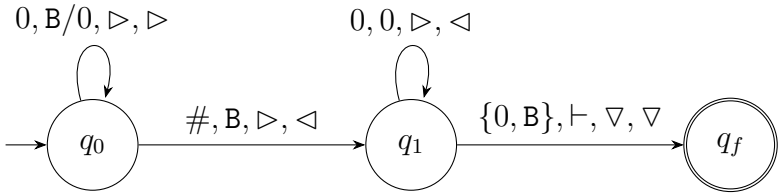
1. Recorremos ambas cintas a la vez y cuando llegamos al final de la primera cinta, es decir, ambas cabezas están en la p-ésima casilla, marcamos la casilla de la segunda cinta con el símbolo p.
2. Devolvemos ambas cabezas al inicio, borrando todos los contenidos de la primera cinta en el proceso (reemplazando por `B`).
3. La primera cabeza se mueve a la segunda casilla en blanco y la marca con el símbolo n.
4. La primera cabeza vuelve al inicio de la cinta.
5. Ambas cabezas se mueven a la derecha. En este proceso, hay tres posibilidades:
   (a) Si ambas ven `B`, entonces volver a ejecutar desde (5).
   (b) Si la primera cabeza ve n, entonces la segunda cabeza está en un múltiplo de n, por lo que revisa si la casilla está marcada con p. Si lo está, rechazamos. Si no lo está, vuelve a ejecutar desde (4).
   (c) Si la primera cabeza ve `B` y la segunda cabeza ve p, entonces p no es múltiplo de n y debemos probar el siguiente n. En este caso, ambas cabezas vuelven al inicio, y se mueven juntas a la derecha hasta que la primera cabeza encuentre n. Cuando lo encuentre, lo reemplaza con `B` y ambas cabezas se mueven a la derecha. En este

punto, si la segunda cabeza ve p significa que n llegó a p, por lo que p es primo, y aceptaremos. Si la segunda cabeza no ve p, entonces la primera cabeza escribe n en esta nueva casilla y ambas cabezas vuelven al inicio de la cinta. Volvemos a ejecutar desde (5).



Problema 2 Entregue una descripción formal de una MT con dos unidireccionales que acepte el lenguaje $L = \{0^n\#0^m \in \{0, \#\}^* \mid 1 \leq n \leq m\}$.

Solución Una posible solución es representada en el siguiente diagrama de estados. La máquina de Turing tiene dos cintas unidireccionales. Primero realiza una copia de la cadena de la primera cinta a la segunda cinta (proceso entre los estados q_0 y q_1), y luego compara ambas cadenas (transición sobre q_1). Si la cadena de la primera cinta es menor o igual a la cadena de la segunda cinta, entonces la máquina de Turing acepta la cadena (q_f). En caso contrario, la máquina de Turing rechaza la cadena.



El alfabeto de la cinta de la MT es $\gamma = \{0, \mathtt{B}\}$

Problema 3 Una MT con cinta infinita en ambas direcciones se define igual que una MT usual (con cinta infinita a la derecha), pero el alfabeto Γ ya no contiene al símbolo $\vdash$, y la MT se puede mover a la izquierda o derecha, sin ninguna restricción.

Demuestre que para toda MT S con cinta infinita en ambas direcciones existe una MT M usual tal que $L(M) = L(S)$.

Solución Sea $S = (Q_s, \Sigma_S, \Gamma_S, q_0^S, q_f^S, \delta_S)$ con cinta infinita en ambas direcciones. El alfabeto de la cinta de M es

$$\Gamma_M = \{\vdash, \mathtt{B}\} \cup (\Gamma_S \setminus \{\mathtt{B}\}) \cup \{\mathtt{N}\}$$

El único aspecto problemático que nos impide simular S con M directamente es que S puede moverse a la izquierda sin limitaciones. Luego, solo debemos lograr simular este aspecto, ya que el resto del funcionamiento de las máquinas es idéntico. La idea será simular cada paso de S tal que, cada vez que S se movería a la izquierda a un espacio que no había *descubierto* antes, moveremos todo el contenido de la cinta a la derecha, creando así un espacio *nuevo* justo a la derecha del $\vdash$. Más formalmente, el pseudocódigo de M es, sobre una entrada $w \in \Sigma_M^*$:

1. Simular un paso de S. Si la cabeza se muve a la izquierda sobre el símbolo $\vdash$, entonces mover la cabeza a la derecha, hacer un shift de cinta a la derecha, reemplazar el nuevo blanco por $\mathtt{N}$ y dejar la cabeza en dicha posición.
2. Si S se detiene, aceptar o rechazar según lo que haga S. En caso contrario, ir al paso (1).

Problema 4 Una MT con *reset a la izquierda* es igual que una MT clásica, salvo que la función de transición tiene la forma

$$\delta \colon (Q \setminus \{q_f\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\triangledown, \triangleright, \text{reset}\}$$

Si $\delta(q, a) = (q', b', \text{reset})$ entonces cuando la MT está en el estado q leyendo el símbolo a, actualiza su estado a q', reemplaza a por b y la cabeza salta a la posición 0 de la cinta (posición donde está el símbolo $\vdash$). La dirección $\triangledown$ es quedarse en la misma posición.

Demuestre que para toda MT usual M, existe una MT con reset a la izquierda S tal que $L(M) = L(S)$.

Solución Sea una MT usual M. Debemos definir una MT con reset a la izquierda S tal que $L(S) = L(M)$. Siguiendo el hint, basta simular los movimientos a la izquierda de M. Es decir, por cada transición $\delta(q, a) = (q', b, \triangleright)$ en M, tenemos la misma transición en S, y por cada transición $\delta(q, a) = (q', b, \triangleleft)$ en M, tenemos en la MT S un módulo que hace lo siguiente: escribir en la posición actual el símbolo b, pasar a un módulo I que posiciona la cabeza lectora a la izquierda de la posición actual, y finalmente, actualizar el estado a q'. Basta describir el módulo I, lo cual hacemos a continuación.

Una primera idea es la siguiente: marcamos el símbolo c de la posición actual p con una marca especial, digamos que reemplazamos c por $\hat{c}$. Hacemos un reset a la izquierda, y luego nos movemos a la derecha hasta encontrar el símbolo marcado $\hat{c}$. El problema con esto, es que no sirve para detectar la posición $p-1$, ya que una vez que vemos el símbolo marcado $\hat{c}$ en la posición p, ya nos hemos pasado de la posición $p-1$. La idea entonces es iterativamente chequear acaso la posición $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, es realmente la posición $p-1$, es decir, la posición a la izquierda del símbolo $\hat{c}$. Para esto mantendremos dos símbolos marcados: el símbolo $\hat{c}$ de la posición p, y el símbolo $\hat{d}$ en la posición i que estamos testeando.

La simulación es la siguiente. En la posición p, marcar el símbolo actual c con $\hat{c}$. Luego hacer un reset a la izquierda, marcar el símbolo $\vdash$ en la posición 0 como $\hat{\vdash}$ y quedarse en la misma posición. (recordar que la MT S puede quedarse en la misma posición.) Ahora hacer iteraciones como sigue:

1. La cabeza está leyendo un símbolo marcado $\hat{x}$.
2. Chequear acaso $\hat{x}$ está a la izquierda de $\hat{c}$. Es decir, mover la cabeza a la derecha de $\hat{x}$ y verificar que el símbolo en esta posición también está marcado.
3. Si se cumple lo anterior, sabemos que encontramos la posición $p-1$ que buscábamos (donde está el símbolo $\hat{x}$). Quitamos la marca en la posición $\hat{c}$ (reemplazar $\hat{c}$ por c), hacer reset a la izquierda, mover cabeza lectora a la derecha hasta encontrar el símbolo marcado $\hat{x}$, quitarle la marca a $\hat{x}$ (reemplazar $\hat{x}$ por x), y quedarse en la misma posición.
4. Si lo anterior no se cumple, mover la marca de $\hat{x}$ una posición a la derecha, y pasar a la siguiente iteración. Para hacer esto, hacer reset a la izquierda, moverse a la derecha hasta encontrar el primer símbolo marcado $\hat{x}$, reemplazar $\hat{x}$ por x, moverse una posición a la derecha, marcar el símbolo actual y con $\hat{y}$, quedarse en la misma posición, pasar al paso (1).

Notar que en nuestra simulación la MT S sólo se mueve a la derecha, se queda en la misma posición, o hace reset a la izquierda.