Unidad I: Computabilidad

Máquinas de Turing

Clase 01 - Lógica para Ciencia de la Computación/Teoría de la Computación

Prof. Miguel Romero

Computabilidad

- ¿Qué problemas pueden ser resueltos por un algoritmo?
- ¿Cómo definimos la noción de algoritmo?

- Un problema computacional especifica, dada una entrada, cual debe ser la salida.
- **Problemas de decisión**: dada una entrada, la salida debe ser **sí** o **no**.

Ejemplos:

SAT
Entrada: una fórmula proposicional φ.
Salida: decidir si φ es satisfacible.

Primos
Entrada: un número natural p.
Salida: decidir si p es primo.

Nos enfocaremos en problemas de decisión.

Formalizamos los problemas de decisión como lenguajes sobre un alfabeto Σ:

- Un alfabeto Σ es un conjunto finito de símbolos.
  - Ejemplo: $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Un palabra w sobre Σ es una secuencia finita de símbolos de Σ.
  - Ejemplo: $w = 1101001$.
- Denotamos por Σ^* al conjunto de todas las palabras sobre Σ.
- Un **lenguaje** L sobre Σ es un conjunto de palabras sobre Σ (es decir, un subconjunto $L \subseteq \Sigma^*$).

Problema de decisión asociado a un lenguaje L sobre alfabeto Σ:

Dada una palabra $w \in \Sigma^*$, decidir si $w \in L$.

Ejemplos:

Para **SAT** podemos usar el alfabeto

$\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), x, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Podemos asumir que las variables proposicionales siempre están en el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Cualquier fórmula se puede representar con una palabra sobre Σ.
  - $(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_3 \wedge x_2)$ se representa como $(x1 \vee \neg x2) \rightarrow (x3 \wedge x2)$.
- Algunas palabras **no** representan ninguna fórmula.
  - $\vee \wedge x34 \neg x54 \neg$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow\rightarrow 100xx$

SAT $= \{w \in \Sigma^* \mid w$ representa una fórmula y w es satisfacible$\}$.

Problema de decisión asociado a un lenguaje L sobre alfabeto Σ:

Dada una palabra $w \in \Sigma^*$, decidir si $w \in L$.

Ejemplos:

Para **Primos** podemos usar el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Cada número natural p se puede representar con su representación binaria.
  - $5 \mapsto 101$ $13 \mapsto 1101$ $1058 \mapsto 10000100010$

Primos $= \{w \in \Sigma^* \mid w$ es la representación binaria de un número primo$\}$.



Turing (1936): *On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem*

Las componentes de una Máquina de Turing son:

- Memoria para lectura y escritura.
  - Cinta infinita hacia la derecha, dividida en posiciones.
    (las posiciones parten desde el 0)
- Mecanismo de control.
  - Cabeza lectora, conjuntos de estados, estado inicial, estado final.
  - Conjunto de transiciones.

Inicialización:

- La posición 0 de la cinta siempre tiene el símbolo inicio $\vdash$.
- La palabra de entrada w sobre alfabeto Σ se coloca en las posiciones $1, \ldots, |w|$.
- El resto de las posiciones $|w|+1, |w|+2, \ldots$ tienen el símbolo blanco $\mathtt{B}$.
- La cabeza lectora se ubica al comienzo de la palabra w, es decir, en la posición 1 de la cinta.
- Comenzamos en el estado inicial q_0.

En cada paso:

- La máquina está en un estado q, y la cabeza lectora está en una posición p con símbolo a.
- Buscamos alguna transición para (q, a).
  - Si no existe tal transición, entonces la máquina se **detiene**.
  - Si existe tal transición, entonces se **ejecuta**:
    se cambia el estado, se escribe un símbolo en la posición p, y la cabeza se mueve a la izquierda o a la derecha.

- Si la máquina se detiene en el **estado final**, entonces la máquina **acepta** la entrada w.
- Si la máquina se detiene en un estado que no es final, entonces la máquina **rechaza** la entrada w.

Ojo: puede ser que la máquina, **no** se detenga (se quede en loop infinito).

Definición:

Una **máquina de Turing (determinista)** (TM) es una tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$, donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada.
- Γ es el alfabeto de la cinta, donde $\Sigma \subseteq \Gamma$, y $\vdash, \mathtt{B} \in \Gamma \setminus \Sigma$.
- q_0 es el estado inicial.
- q_f es el estado final.
- $\delta : (Q \setminus \{q_f\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright\}$ es una función parcial llamada la función de transición.

Algunas observaciones:

- δ es parcial y **no** está definida para q_f

$$\delta : (Q \setminus \{q_f\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright\}$$

- $\vdash$ indica el comienzo de la cinta. Asumiremos lo siguiente:
  - Nunca nos movemos a la izquierda del símbolo inicio $\vdash$.

    Si $\delta(q, \vdash)$ está definido, entonces $\delta(q, \vdash) = (q', \vdash, \triangleright)$.

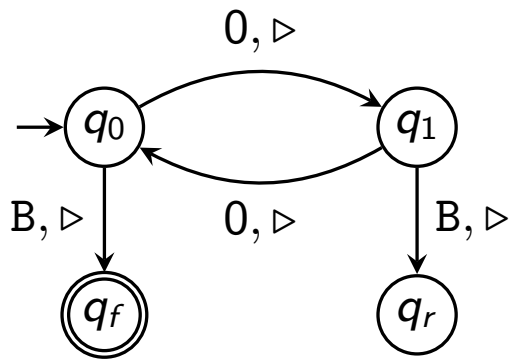
Ejemplos

Considere la MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$, donde:

- $\Sigma = \{0\}$ y $\Gamma = \{0, \vdash, \mathrm{B}\}$.
- $Q = \{q_0, q_1, q_r, q_f\}$.
- δ se define como:

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, 0, \triangleright) \qquad \delta(q_1, 0) = (q_0, 0, \triangleright)$$
$$\delta(q_0, \mathrm{B}) = (q_f, \mathrm{B}, \triangleright) \qquad \delta(q_1, \mathrm{B}) = (q_r, \mathrm{B}, \triangleright)$$

Visualmente:



¿Qué palabras acepta M?

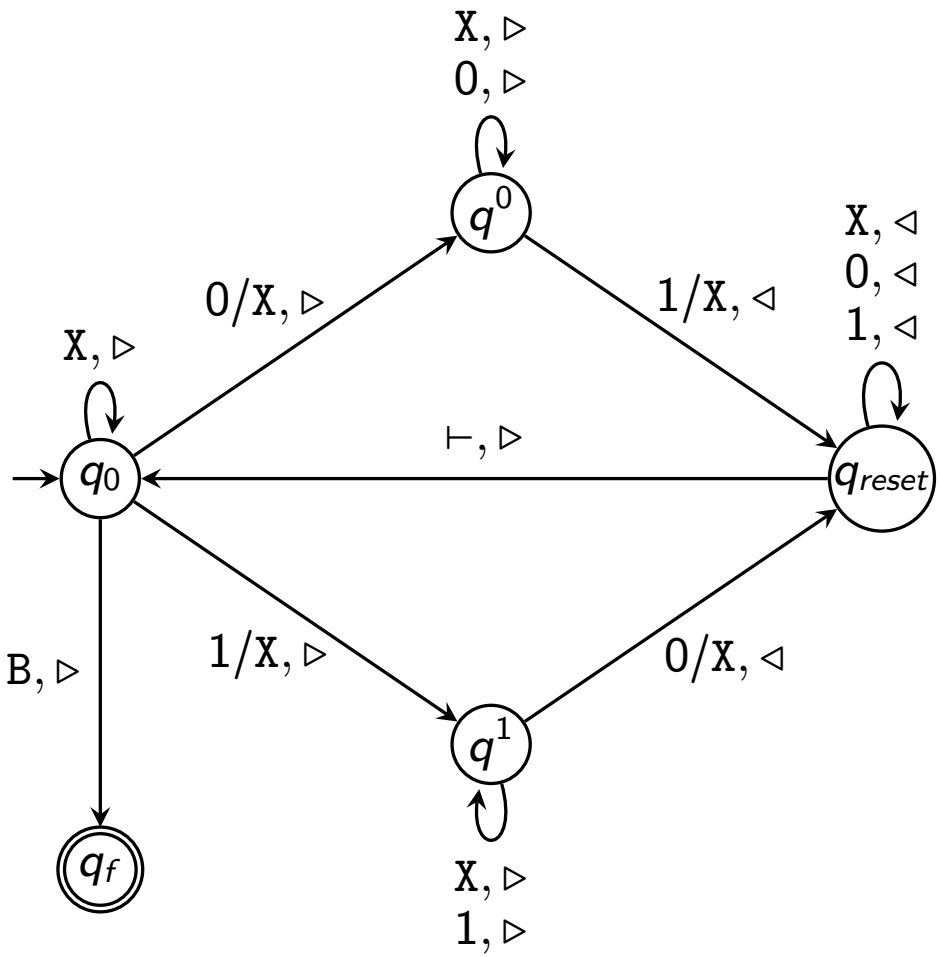
Ejemplos

Considere la MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$, donde:

- $\Sigma = \{0, 1\}$ y $\Gamma = \{0, 1, \mathtt{X}, \vdash, \mathtt{B}\}$.
- $Q = \{q_0, q^0, q^1, q_{reset}, q_f\}$.
- δ se define como:

$$\delta(q_0, \mathtt{X}) = (q_0, \mathtt{X}, \triangleright)$$
$$\delta(q_0, 0) = (q^0, \mathtt{X}, \triangleright)$$
$$\delta(q_0, 1) = (q^1, \mathtt{X}, \triangleright)$$
$$\delta(q_0, \mathtt{B}) = (q_f, \mathtt{B}, \triangleright)$$
$$\delta(q_{reset}, \mathtt{X}) = (q_{reset}, \mathtt{X}, \triangleleft)$$
$$\delta(q_{reset}, 0) = (q_{reset}, 0, \triangleleft)$$
$$\delta(q_{reset}, 1) = (q_{reset}, 1, \triangleleft)$$
$$\delta(q_{reset}, \vdash) = (q_0, \vdash, \triangleright)$$
$$\delta(q^0, \mathtt{X}) = (q^0, \mathtt{X}, \triangleright)$$
$$\delta(q^0, 0) = (q^0, 0, \triangleright)$$
$$\delta(q^0, 1) = (q_{reset}, \mathtt{X}, \triangleleft)$$
$$\delta(q^1, \mathtt{X}) = (q^1, \mathtt{X}, \triangleright)$$
$$\delta(q^1, 1) = (q^1, 1, \triangleright)$$
$$\delta(q^1, 0) = (q_{reset}, \mathtt{X}, \triangleleft)$$

Ejemplos



¿Qué palabras acepta M?

Una **configuración** de una MT está dada por:

- El estado actual de la MT.
- La posición actual de la cabeza lectora.
- El contenido de la cinta (ignorando `B` irrelevantes hacia la derecha).

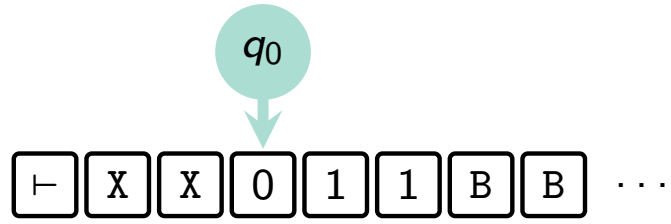
Definición:

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$ una MT. Una **configuración** de M es representada por una palabra de la forma uqv, con $u, v \in \Gamma^*$ y $q \in Q$, donde:

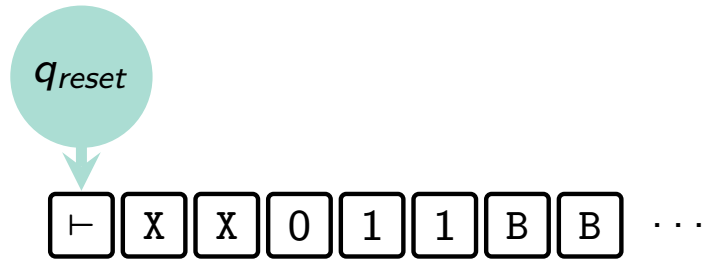
- q es el estado actual de M.
- $|u|$ es la posición actual de la cabeza lectora.
- uv es el contenido de la cinta.

Ejemplos

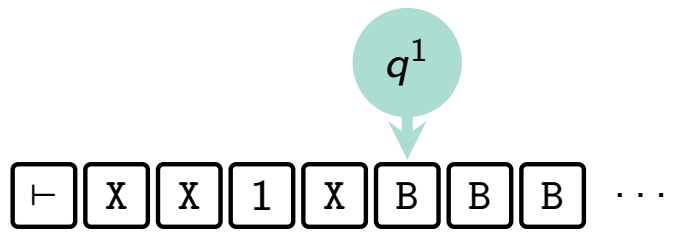
$\vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,q_0\,0\,1\,1$



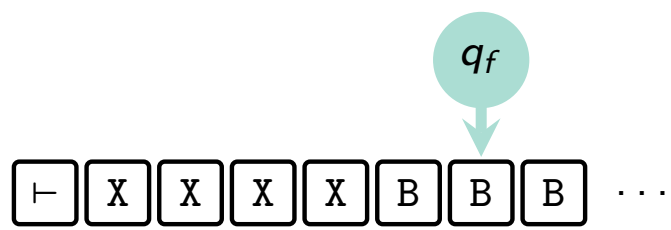
$q_{reset} \vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,0\,1\,1$



$\vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,1\,\mathtt{X}\,q^1$



$\vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,\mathtt{X}\,\mathtt{X}\,\mathtt{B}\,q_f$



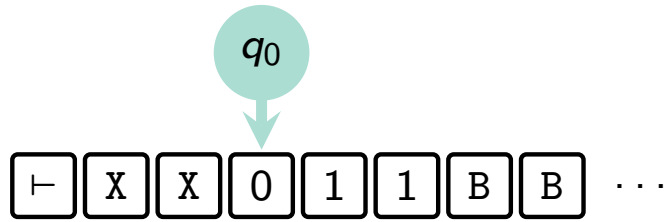
Definición:

Decimos que una configuración uqv es:

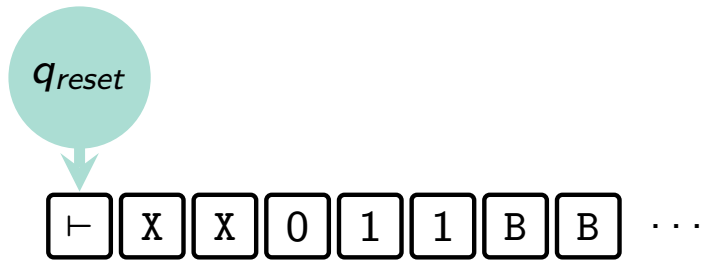
- de aceptación si $q = q_f$.
- de detención si $\delta(q, a)$ no está definido, donde $v = av'$.
- de rechazo si es de detención y $q \neq q_f$.

Ejemplos

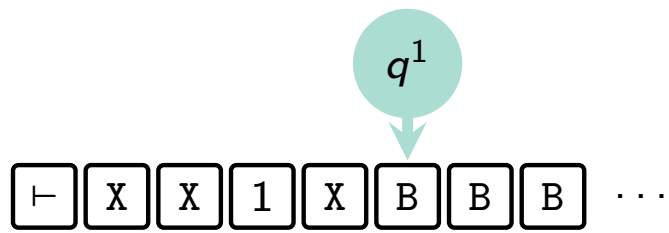
No es de detención $\vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,q_0\,0\,1\,1$



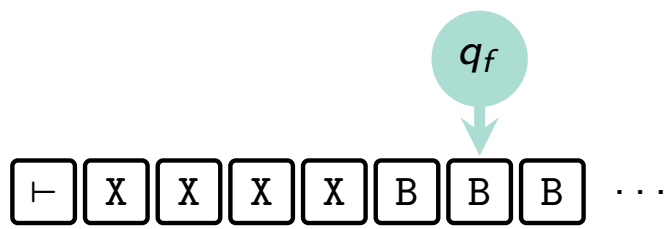
No es de detención $q_{reset} \vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,0\,1\,1$



Rechazo $\vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,1\,\mathtt{X}\,q^1$



Aceptación $\vdash \mathtt{X}\,\mathtt{X}\,\mathtt{X}\,\mathtt{X}\,\mathtt{B}\,q_f$



Definición:

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$ una MT. Se define la relación **siguiente configuración** $\overset{M}{\longmapsto}$ entre configuraciones de M como:

$C \overset{M}{\longmapsto} C'$ si y sólo si

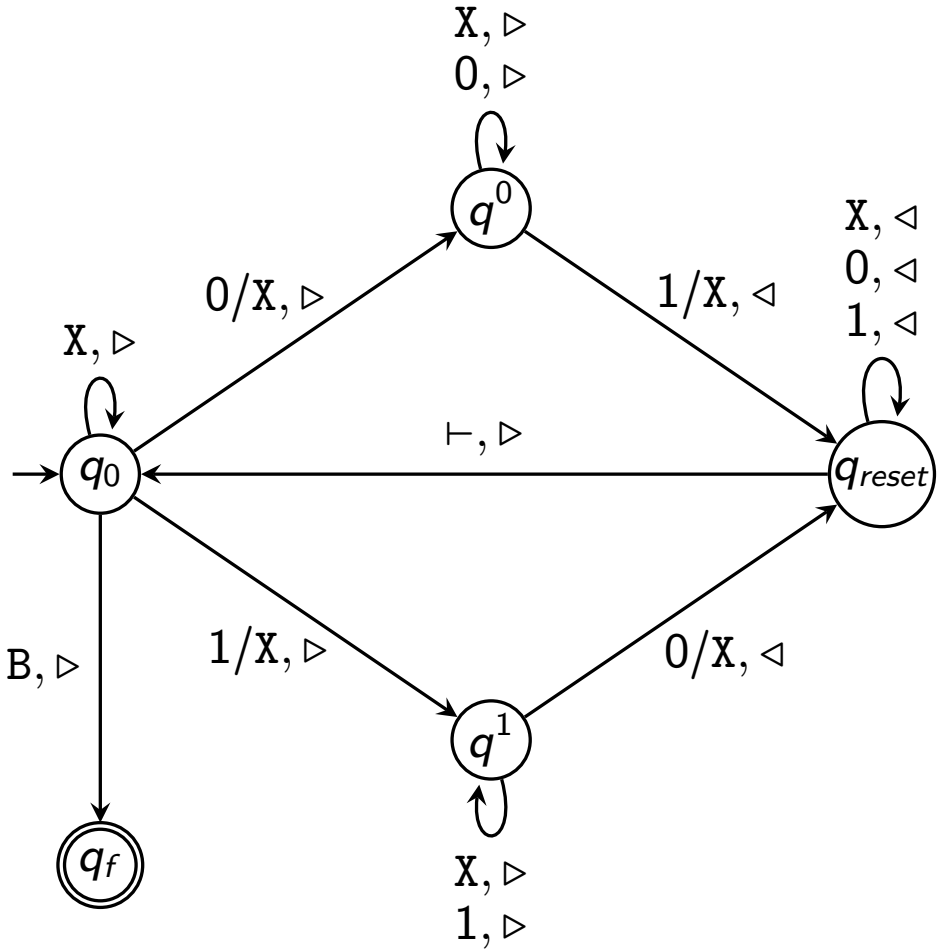
- Existe transición $\delta(q, a) = (q', b, \triangleleft)$, $u, v \in \Gamma^*$ y $d \in \Gamma$ tal que:

$$C = u\, d\, q\, a\, v \qquad C' = u\, q'\, d\, b\, v$$

- O existe transición $\delta(q, a) = (q', b, \triangleright)$ y $u, v \in \Gamma^*$ tal que:

$$C = u\, q\, a\, v \qquad C' = u\, b\, q'\, v$$

Ejemplos



$$\vdash \mathtt{X}\mathtt{X}q_0011 \xrightarrow{M} \vdash \mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{X}q^0 11$$
$$\vdash \mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{X}q^0 11 \xrightarrow{M} \vdash \mathtt{X}\mathtt{X}q_{reset}\mathtt{X}\mathtt{X}1$$
$$\vdash \mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{X}q_0 \xrightarrow{M} \vdash \mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{X}\mathtt{B}q_f$$

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$ una MT y $w \in \Sigma^*$.

Definición:

- Una **ejecución** ρ de M es una secuencia de configuraciones

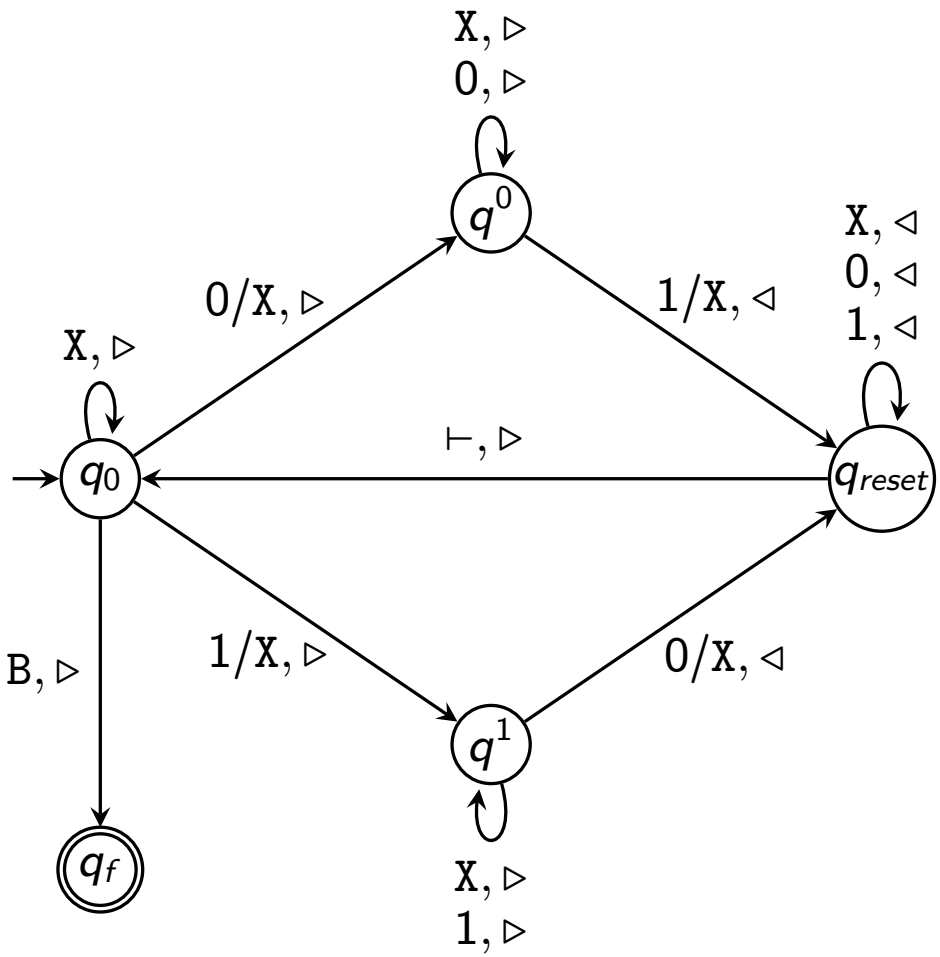
  $$\rho = C_0, C_1, C_2, \ldots \text{ (no necesariamente finita)}$$

  tal que $C_i \overset{M}{\longmapsto} C_{i+1}$ para todo $i \geq 0$.

- Decimos que $\rho = C_0, C_1, C_2, \ldots$ es **la ejecución** de M sobre w si:
  - ρ es una ejecución de M.
  - $C_0 = \vdash q_0 w$. (configuración inicial de M sobre w)
  - Si $\rho = C_0, \ldots, C_m$ es finito, entonces C_m es de detención.

- En caso que ρ sea finito, decimos que M se **detiene** con w.

Ejemplos



¿Cuáles son las ejecuciones de M sobre 01110 y 011100?

Ejemplos

Ejecución de M sobre 01110:

$\vdash q_0 01110$

$\vdash \mathtt{X} q^0 1110$

$\vdash q_{reset} \mathtt{XX} 110$

$q_{reset} \vdash \mathtt{XX} 110$

$\vdash q_0 \mathtt{XX} 110$

$\vdash \mathtt{X} q_0 \mathtt{X} 110$

$\vdash \mathtt{XX} q_0 110$

$\vdash \mathtt{XXX} q^1 10$

$\vdash \mathtt{XXX1} q^1 0$

$\vdash \mathtt{XXX} q_{reset} 1\mathtt{X}$

$\vdash \mathtt{XX} q_{reset} \mathtt{X1X}$

$\vdash \mathtt{X} q_{reset} \mathtt{XX1X}$

$\vdash q_{reset} \mathtt{XXX1X}$

$q_{reset} \vdash \mathtt{XXX1X}$

$\vdash q_0 \mathtt{XXX1X}$

$\vdash \mathtt{X} q_0 \mathtt{XX1X}$

$\vdash \mathtt{XX} q_0 \mathtt{X1X}$

$\vdash \mathtt{XXX} q_0 1\mathtt{X}$

$\vdash \mathtt{XXXX} q^1 \mathtt{X}$

$\vdash \mathtt{XXXXX} q^1$

(*rechaza*)

Ejemplos

Ejecución de M sobre 011100:

$\vdash q_0011100$
$\vdash \mathtt{X}q^0 11100$
$\vdash q_{reset}\mathtt{XX}1100$
$q_{reset} \vdash \mathtt{XX}1100$
$\vdash q_0\mathtt{XX}1100$
$\vdash \mathtt{X}q_0\mathtt{X}1100$
$\vdash \mathtt{XX}q_0 1100$
$\vdash \mathtt{XXX}q^1 100$
$\vdash \mathtt{XXX}1q^1 00$
$\vdash \mathtt{XXX}q_{reset}1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{XX}q_{reset}\mathtt{X}1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{X}q_{reset}\mathtt{XX}1\mathtt{X}0$
$\vdash q_{reset}\mathtt{XXX}1\mathtt{X}0$
$q_{reset} \vdash \mathtt{XXX}1\mathtt{X}0$
$\vdash q_0\mathtt{XXX}1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{X}q_0\mathtt{XX}1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{XX}q_0\mathtt{X}1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{XXX}q_0 1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{XXXX}q^1\mathtt{X}0$
$\vdash \mathtt{XXXXX}q^1 0$
$\vdash \mathtt{XXXX}q_{reset}\mathtt{XX}$
$\vdash \mathtt{XXX}q_{reset}\mathtt{XXX}$
$\vdash \mathtt{XX}q_{reset}\mathtt{XXXX}$
$\vdash \mathtt{X}q_{reset}\mathtt{XXXXX}$
$\vdash q_{reset}\mathtt{XXXXXX}$
$q_{reset} \vdash \mathtt{XXXXXX}$
$\vdash q_0\mathtt{XXXXXX}$
$\vdash \mathtt{X}q_0\mathtt{XXXXX}$
$\vdash \mathtt{XX}q_0\mathtt{XXXX}$
$\vdash \mathtt{XXX}q_0\mathtt{XXX}$
$\vdash \mathtt{XXXX}q_0\mathtt{XX}$
$\vdash \mathtt{XXXXX}q_0\mathtt{X}$
$\vdash \mathtt{XXXXXX}q_0$
$\vdash \mathtt{XXXXXB}q_f$
(*acepta*)

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_f, \delta)$ una MT y $w \in \Sigma^*$.

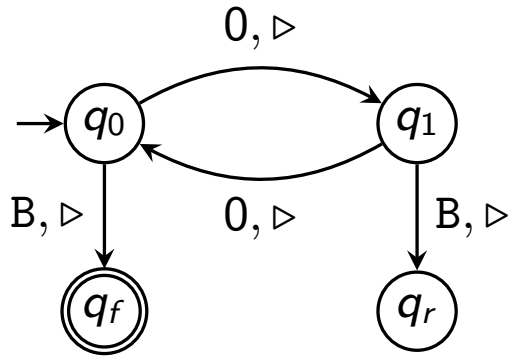
Definición:

- M **acepta** w si la ejecución ρ de M sobre w cumple que:
  - $\rho = C_0, \ldots, C_m$ es finita. (M se detiene con w)
  - C_m es una configuración de aceptación.
- El **lenguaje aceptado por** M se define como:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ acepta } w\}.$$

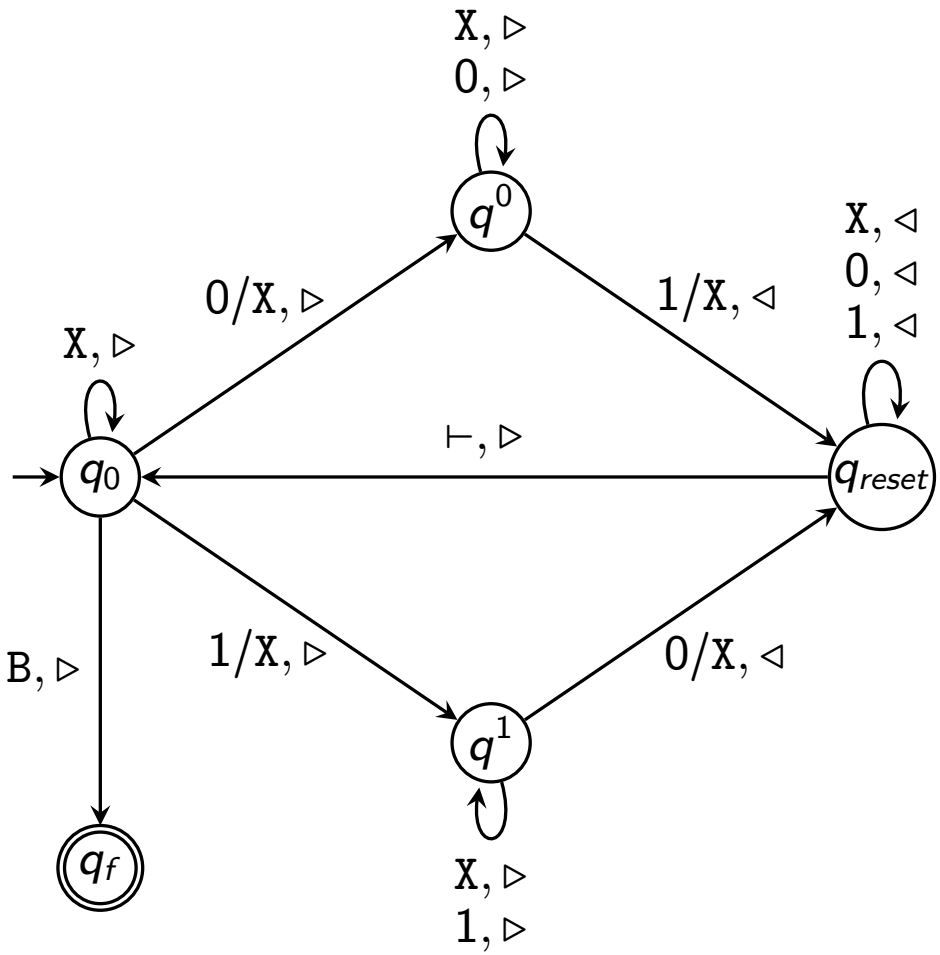
¿Cuándo ocurre que M rechaza w?

Ejemplos



$L(M) = \{0^n \in \{0\}^* \mid n \text{ es un número par}\}.$

Ejemplos



$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{la cantidad de 0's y 1's en } w \text{ es la misma}\}.$

Queremos aceptar el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = uu \text{ para algún } u\}$.

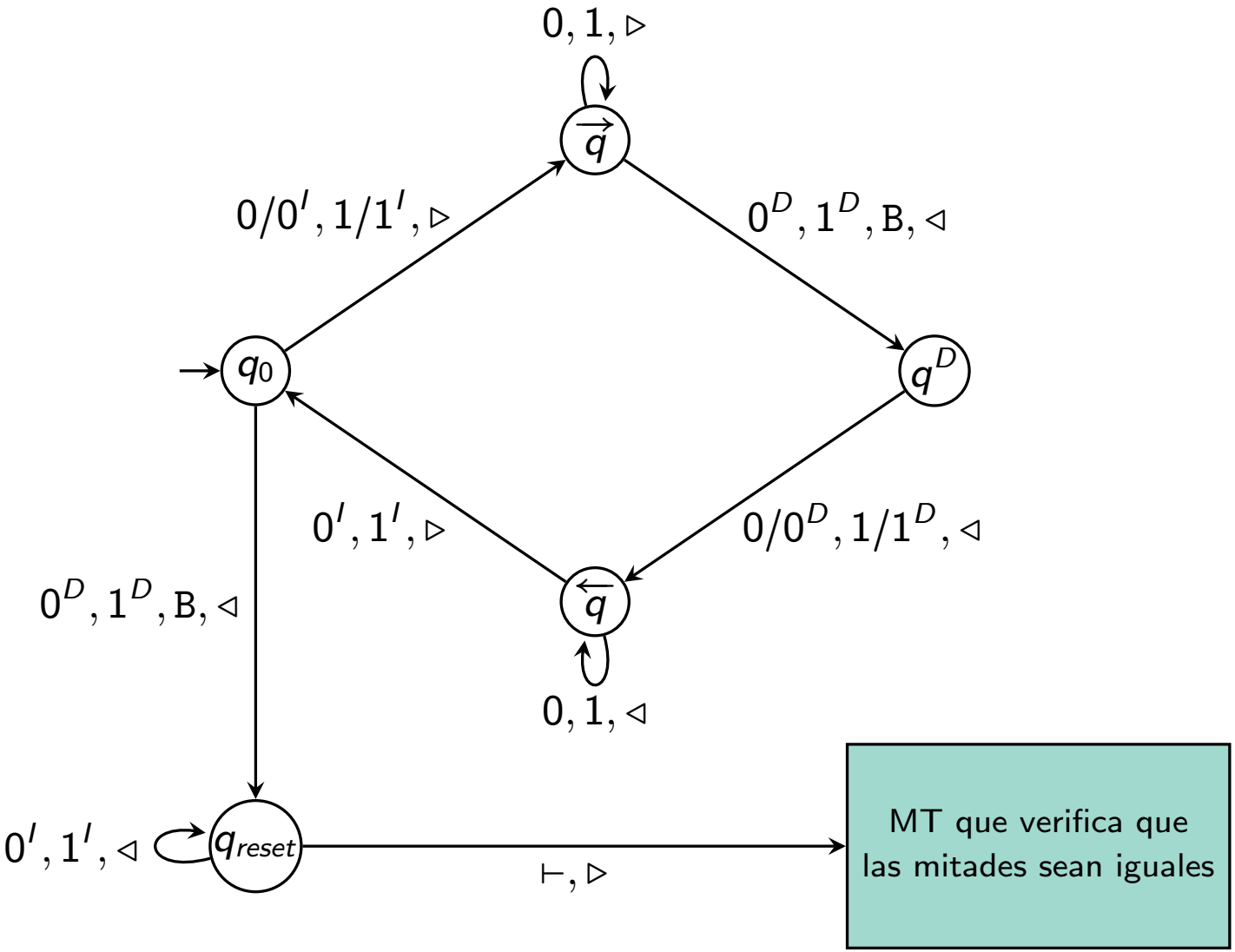
Idea:

- "Dividir" la entrada w en dos mitades.
- "Zigzaguear" entre las dos mitades, y verificar que las posiciones correspondientes coinciden.

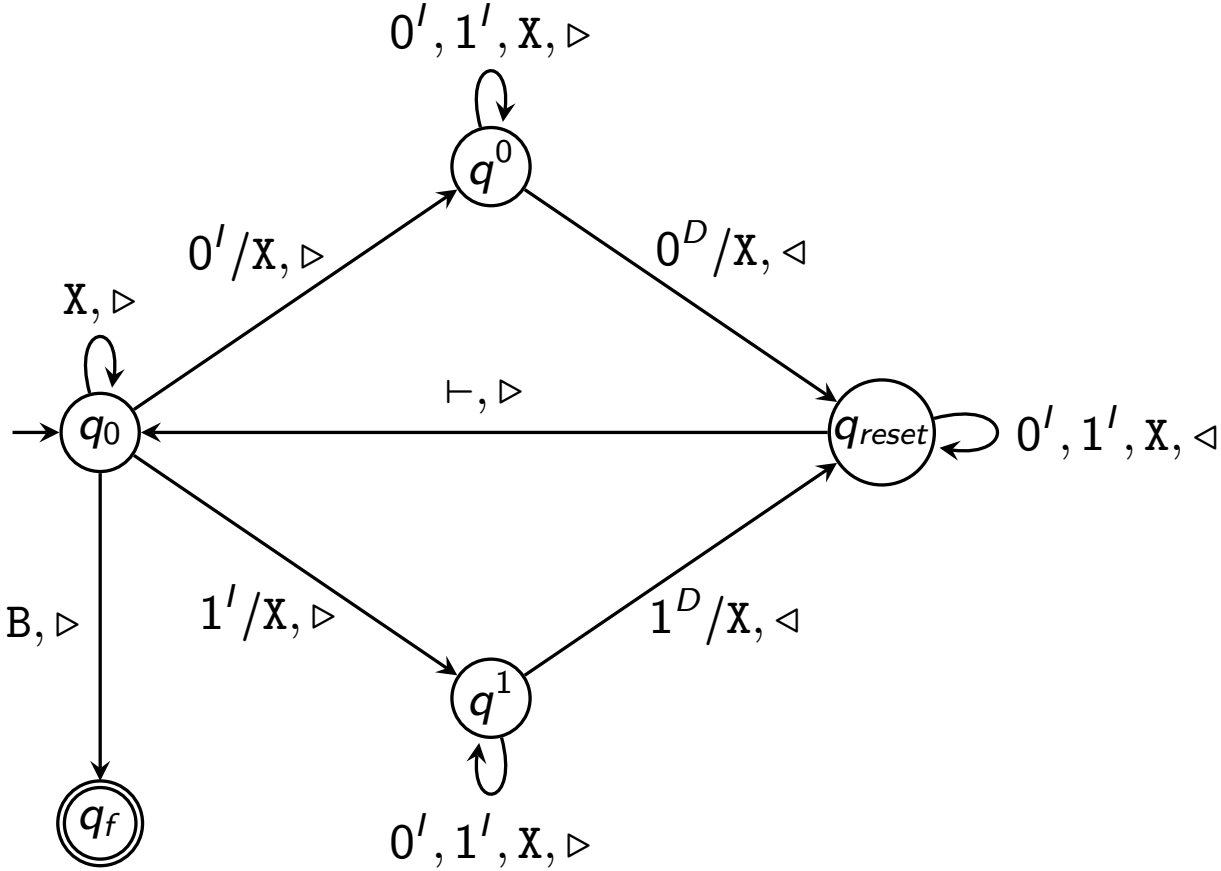
$$\Sigma = \{0,1\} \qquad \Gamma = \{0, 1, 0^I, 0^D, 1^I, 1^D, \mathtt{X}, \vdash, \mathtt{B}\}$$

Ejemplos de MTs

"Dividir" la entrada w en dos mitades.



"Zigzaguear" entre las dos mitades, y verificar que las posiciones correspondientes coinciden.



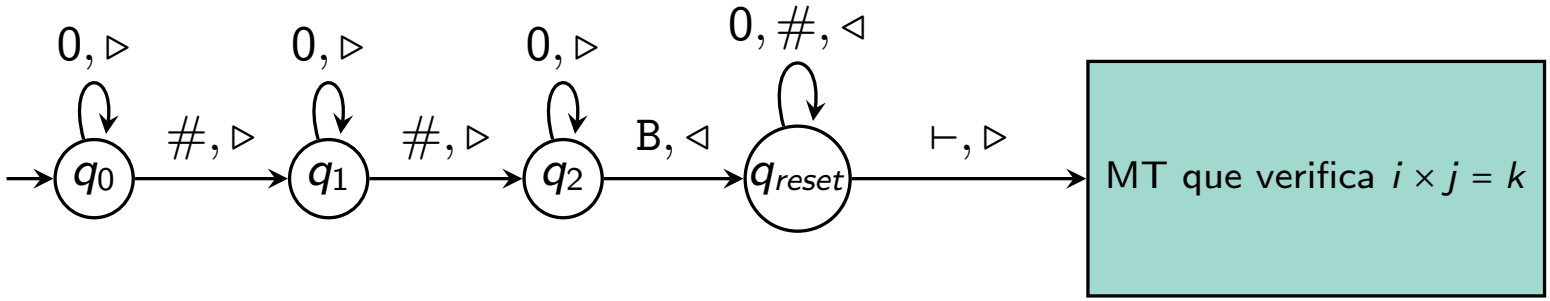
Queremos aceptar el lenguaje $L = \{0^i \# 0^j \# 0^k \in \{0, \#\}^* \mid i \times j = k\}$.

Idea:

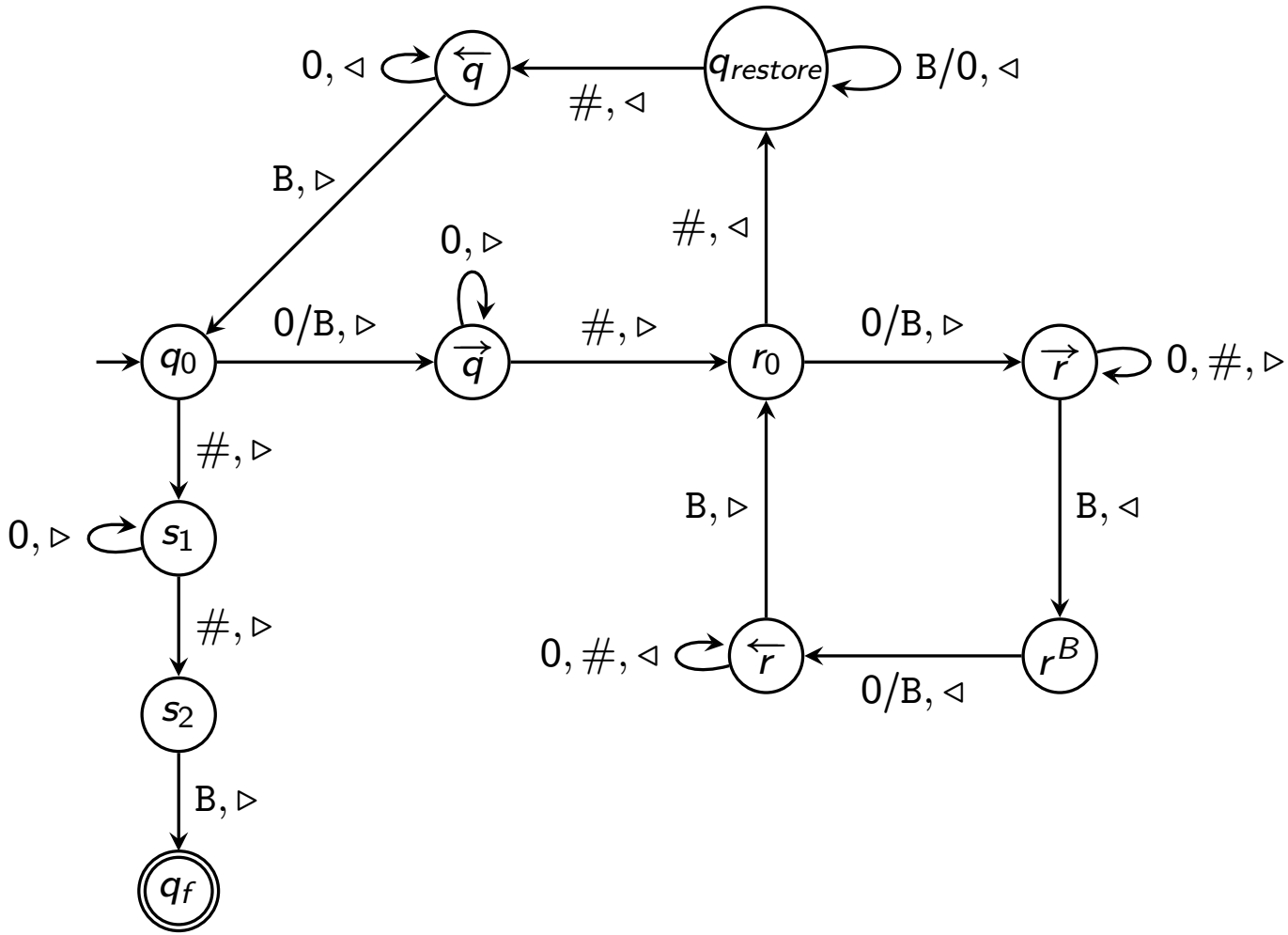
- Verificar que la entrada tiene la forma $0^i \# 0^j \# 0^k$, para $i, j, k \geq 0$.
- Verificar que $i \times j = k$.

$$\Sigma = \{0, \#\} \qquad \Gamma = \{0, \#, \vdash, \mathtt{B}\}$$

Verificar que la entrada tiene la forma $0^i\#0^j\#0^k$, para $i, j, k \geq 0$.



Verificar que $i \times j = k$.

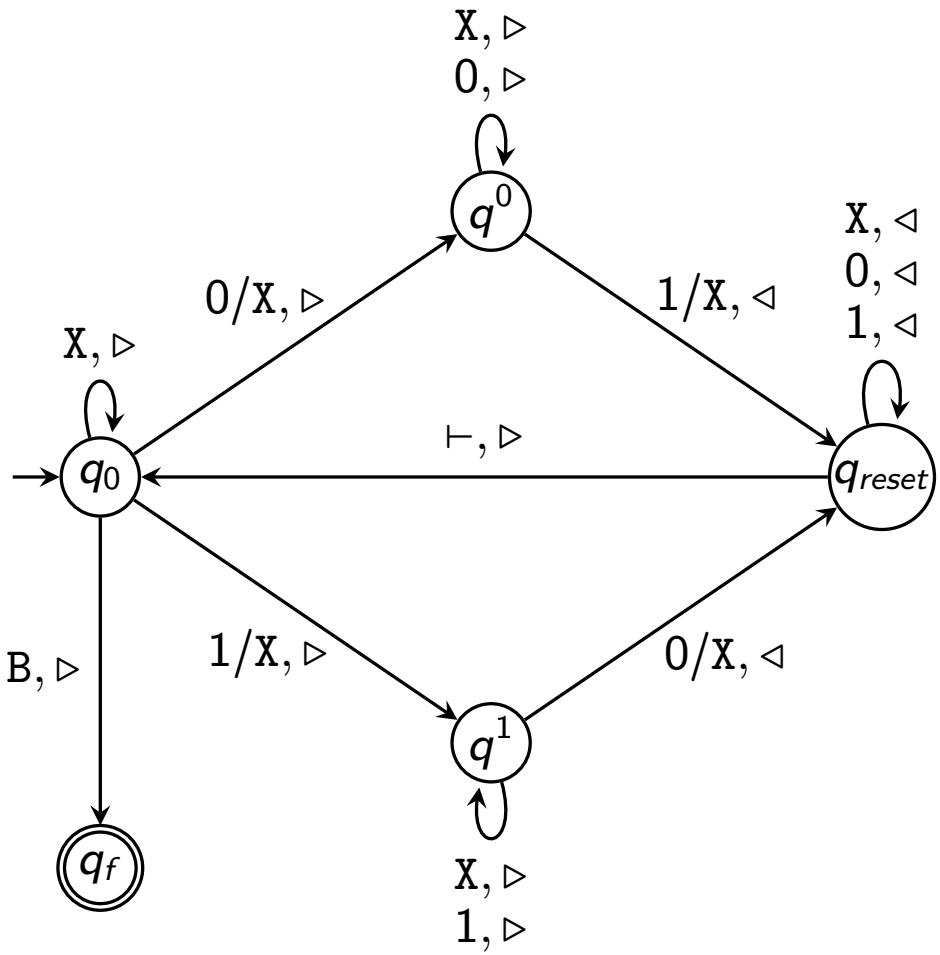


- Almacenar información en los estados.
- Almacenar información en los símbolos de la cinta.
- Separar la MT en módulos o subrutinas.

- Descripción formal: Alfabetos, conjunto de estados, función de transición.
- Descripción informal: Pseudocódigo que explica el funcionamiento de la MT en términos de la cinta y la cabeza lectora, **sin** hacer referencia a estados ni transiciones.

Muchas veces la descripción informal será suficiente.

Pseudocódigos de MTs: ejemplos



$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{la cantidad de 0's y 1's en } w \text{ es la misma}\}$.

Pseudocódigo de M:

Sobre entrada $w \in \{0,1\}^*$:

1. Mover la cabeza hacia la derecha, hasta encontrar un símbolo $b \in \{0,1\}$. Recordar b y tacharlo en la cinta.
2. Si en el paso (1), no se encuentra b, **aceptar**.
3. Mover la cabeza hacia la derecha, hasta encontrar $1 - b$. Tacharlo en la cinta.
4. Si en el paso (3), no se encuentra $1 - b$, **rechazar**.
5. Mover la cabeza al inicio de la cinta. Ir al paso (1).

Pseudocódigo de MT M que acepta $L = \{0^i\#0^j\#0^k \in \{0,\#\}^* \mid i \times j = k\}$.

Sobre entrada $w \in \{0,\#\}^*$:

1. Mover la cabeza hacia la derecha y verificar que w tiene la forma $0^i\#0^j\#0^k$. Si no tiene esta forma, **rechazar**.
2. Mover la cabeza al inicio de la cinta.
3. Tachar un 0 del primer bloque.
4. Si no hay 0 para tachar en el paso (3), verificar que no queden 0's en el tercer bloque y **aceptar**. En caso contrario, **rechazar**.
5. Tachar un 0 del segundo bloque.
6. Si no hay 0 para tachar en el paso (5), restaurar todos los 0's tachados del segundo bloque, mover la cabeza al inicio de la cinta, ir al paso (3).
7. Si no quedan 0's en el tercer bloque, **rechazar**. En caso contrario, borrar un 0 del tercer bloque e ir al paso (5).