Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 - Lógica para Ciencia de la Computación

Ayudantía 2

21 de marzo de 2025

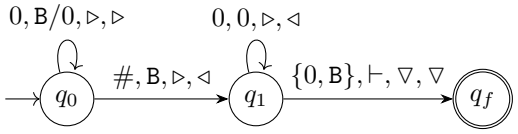
Profesor: Miguel Romero

Ayudantes: Alexander Pinto y Alejandra Schild

Problema 1. Escriba una descripción formal (alfabeto y diagrama de estados) de una máquina de Turing con dos cintas unidireccionales que acepte el lenguaje:

$$L = \{0^n \# 0^m \in \{0, \#\}^* \mid 1 \leq n \leq m\}$$

Solución. Una posible solución es representada en el siguiente diagrama de estados. La máquina de Turing tiene dos cintas unidireccionales. Primero realiza una copia de la cadena de la primera cinta a la segunda cinta (proceso entre los estados q_0 y q_1), y luego compara ambas cadenas (transición sobre q_1). Si la cadena de la primera cinta es menor o igual a la cadena de la segunda cinta, entonces la máquina de Turing acepta la cadena (q_f). En caso contrario, la máquina de Turing rechaza la cadena.



El alfabeto de la cinta de la MT es: $\Gamma = \{0, \mathtt{B}\}$

Problema 2. (*Propuesto*) Escriba una descripción formal (alfabeto y diagrama de estados) de una máquina de Turing con dos cintas unidireccionales que acepte el lenguaje:

$$L = \{0^n \# 0^m \in \{0, \#\}^* \mid m \text{ es múltiplo de } n\}$$

Hint. De manera similar al problema anterior podemos hacer una copia de la primera palabra y hacer k comparaciones donde m es múltiplo de n si y solo si $m = k \cdot n$.

Problema 3. Demuestre que para toda máquina de Turing M con cinta infinita en ambas direcciones, existe una máquina de Turing S con cinta infinita a la derecha, tal que $L(M) = L(S)$.

La equivalencia debe ser probada en ambas direcciones, sin embargo, dado que una máquina es más restrictiva que la otra, simular una máquina más restrictiva por medio de una con menos restricciones, significa simplemente agregar las restricciones necesarias para su equivalencia. En este caso basta con agregar el símbolo de inicio de cinta al alfabeto de cinta de M, es decir, $\Gamma_M = \Gamma_S \cup \{\vdash\}$. Iniciar la cinta con el símbolo de inicio $\vdash$ y copiar la entrada de S en M. Simular un paso de S. Aceptar o rechazar según lo haga S.

El otro sentido es el que requiere más atención y suele ser suficiente en una demostración. La MT S puede simular cualquier paso de la MT M excepto aquellos que requieran moverse a la izquierda de la cinta en una posición inicial, es decir sobre el símbolo $\vdash$. Para ello, podemos hacer un *shift* (los detalles de shift se encuentran en las diapositivas de la Clase 02) a la derecha de la cinta de S cada vez que la cabeza de M se mueva a la izquierda de la cinta, agregando un símbolo $\mathtt{B}$ a la izquierda de la cinta de S (el triángulo sobre

el caracter indica la posición del cabezal):

$$\begin{aligned}
\text{en M}: &\cdots \overset{\triangledown}{\texttt{B}}\texttt{B01}\cdots\texttt{B}\cdots \\
&\cdots \texttt{B}\overset{\triangledown}{\texttt{B}}\texttt{01}\cdots\texttt{B}\cdots \\
\text{en S}: &\vdash \overset{\triangledown}{0}1\cdots\texttt{B}\cdots \\
&\vdash \overset{\triangledown}{\texttt{B}}01\cdots\texttt{B}\cdots
\end{aligned}$$

Sin embargo, esta solución no es suficiente porque dar la capacidad de escribir `B` en la cinta de S puede conducir a problemas, por ejemplo, no podemos distinguir con facilidad el fin de la palabra escrita. Para solucionar este problema, podemos utilizar un símbolo especial nulo `N` en reemplazo de `B`.

$$\begin{aligned}
\text{en M}: &\cdots \overset{\triangledown}{\texttt{B}}\texttt{B01}\cdots\texttt{B}\cdots \\
&\cdots \texttt{B}\overset{\triangledown}{\texttt{B}}\texttt{01}\cdots\texttt{B}\cdots \\
\text{en S}: &\vdash \overset{\triangledown}{0}1\cdots\texttt{B}\cdots \\
&\vdash \overset{\triangledown}{\texttt{N}}01\cdots\texttt{B}\cdots
\end{aligned}$$

Luego el pseudocódigo de la máquina de Turing S sería:

Sobre la entrada $w \in \Sigma_M^*$:

1. Inicializar la cinta de S con $\vdash w$.
2. Repetir hasta que M se detenga, aceptar o rechazar según lo que haga M:
   a) Simular un paso de M.
   b) Si M se mueve a la izquierda de la cinta sobre $\vdash$, hacer un *shift* a la derecha de la cinta de S, reemplazar el nuevo blanco por `N` y dejar el cabezal en tal posición.

Problema 4. Decimos que una máquina de Turing de *escritura única* es una máquina de Turing de cinta simple unidireccional que solo puede alterar cada casilla de la cinta una única vez (incluyendo la porción de entrada de la cinta). Recuerde que la entrada de la cinta no se considera como escritura. Demuestre que para toda máquina de Turing de escritura única M, existe una máquina de Turing con cinta infinita a la derecha S tal que $L(M) = L(S)$.

Solución. (*adaptada del libro Introduction to the theory of Computation, Sipser, 2013*)

Para entender mejor el problema, primero simularemos una MT ordinaria sobre una MT D de *escritura doble*, es decir, una MT que puede escribir a lo más dos veces en cada casilla de la cinta.

Notemos que en este caso la MT D es más restrictiva que la MT S. La MT D puede simular un paso simple de la MT S al copiar la cinta entera sobre una porción nueva de la cinta a la derecha, de la porción actualmente utilizada. Es decir, D escribe una nueva configuración en la porción de la cinta que no ha sido utilizada aún. Este proceso de copia opera caracter a caracter, por lo que se debe llevar control de cada caracter copiado, además de la posición de la cabeza de la cinta. Para esto es necesario utilizar un alfabeto extendido:

$$\Gamma_D = \{\vdash, \texttt{B}\} \cup \Omega_S \cup \hat{\Omega}_S \cup \tilde{\Omega}_S \cup \{\#\}$$

donde $\Omega_S = \Gamma_S \setminus \{\vdash, \texttt{B}\}$, $\hat{\Omega}_S = \{\hat{a} \mid a \in \Omega_S\}$ y $\tilde{\Omega}_S = \{\tilde{a} \mid a \in \Omega_S\}$ y $\#$ es un símbolo que representa el inicio de la cinta de S en cada nueva porción de la cinta de D. Este proceso altera cada celda de la cinta a lo más dos veces, uno cuando se escribe por primera vez y otro para marcar la celda que ha sido copiada, según las reglas de la MT original. La posición del cabezal de la MT original también es marcada en la cinta. Por

ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{en S}: &\vdash 0\overset{\triangledown}{1}1\mathtt{B}\cdots\\
&\vdash 0\overset{\triangledown}{1}01\mathtt{B}\cdots\\
\text{en D}: &\vdash 0\overset{\triangledown}{1}1\mathtt{B}\cdots\\
&\vdots\\
&\vdash \tilde{0}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1}\#0\overset{\triangledown}{\hat{1}}01\mathtt{B}\cdots
\end{aligned}$$

A partir de esta simulación, podemos construir una MT M de escritura única similar a D excepto que ahora necesitamos dos celdas para representar una celda de la cinta de S. La primera celda contiene el símbolo de la máquina original y la segunda celda será utilizada para marcar cuando la celda ha sido copiada. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{en S}: &\vdash 0\overset{\triangledown}{1}1\mathtt{B}\cdots\\
&\vdash 0\overset{\triangledown}{1}01\mathtt{B}\cdots\\
\text{en M}: &\vdash 0111\mathtt{B}\cdots\\
&\vdash \hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\#0\mathtt{B}1\mathtt{B}1\mathtt{B}1\mathtt{B}\#\mathtt{B}\cdots && \textit{// copia inicial de la entrada según formato de } M\\
&\vdots\\
&\vdash \hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\#0{\sim}1{\wedge}1{\sim}1{\sim}\#0\mathtt{B}\overset{\triangledown}{\hat{1}}\mathtt{B}0\mathtt{B}1\mathtt{B}\#\mathtt{B}\cdots
\end{aligned}$$

Note que inicialmente la entrada no es dada según el formato de M, por lo que podemos marcar directamente sobre cada caracter de la entrada. Luego, tenemos que el alfabeto de la cinta de M es:

$$\Gamma_M = \{\vdash, \mathtt{B}\} \cup \Omega_S \cup \hat{\Omega}_S \cup \{\wedge, \sim, \#\}$$

donde $\wedge$ y $\sim$ son los símbolos que marcan la ubicación del cabezal y la celda copiada respectivamente, $\#$ es el símbolo que marca el inicio y final de w en la cinta S en cada nueva porción de la cinta de M, y $\hat{\Omega}_S$, los símbolos que marcan la ubicación del cabezal al finalizar el paso anterior.

El pseudocódigo de la máquina de Turing M sería: Sobre la entrada $w \in \Sigma_S^*$:

1. Inicializar la cinta de M con w según formato de M:

   $$\vdash \hat{a_1} \cdots \hat{a_n}\#\overset{\triangledown}{a_1}\mathtt{B}\cdots a_n\mathtt{B}\#$$

   donde a_i es el i-ésimo símbolo de w.
2. Repetir hasta que S se detenga, aceptar o rechazar según lo que haga S:
   a) Simular un paso de S.
   b) Si hay una alteración de la cinta de S, copiar la cinta entera de S sobre una nueva porción de la cinta de M, tomando en cuenta la posición del cabezal y la celda copiada. Marcar la celda copiada con $\sim$ y la posición del cabezal con $\wedge$, utilizando para ello la celda contigua en blanco. Indique la posición del cabezal en la nueva porción de cinta con $\hat{a}$, donde a es el símbolo original. Marcar el fin de w en la cinta S en la nueva porción de la cinta de M con $\#$. Ubique el cabezal en la nueva porción de la cinta de M según la ubicación de $\hat{a}$.