Jueves 2 Marzo.

Libro ⊛ Casella/Berger (1990)
Statistical Inference (Cap 1-5)
⊛ Bamy James
Probabilidade ability
⊛ ~~Bardos Zylinski~~
⊛ Probability and Statistical Inference

Programa:
1. Modelos Prob.
2. Variables Aleatorias.
3. Vectores "
4. Transformaciones.
5. Condicionales.

Modelos de Probabilidad.

Es la representación matemática de una situación con resultado incierto (fenómeno aleatorio)
Todas estas situaciones se llaman Experimentos Aleatorios.

ω: representa un resultado posible → suceso elemental.
Ω: Cjto. de todos los resultados posibles → Espacio muestral.

Es decir, $\omega \in \Omega \longleftrightarrow \omega$ es un resultado posible del experimento.

⇒ Ω es el primer elemento de nuestro modelo y debe expresarse apropiadamente.

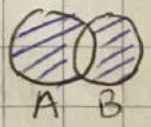
Ejemplo:
1. Resultado de un exámen (+, −) o negocio (E o F) o lanzar moneda (C o S)
2. Nº de defectuosos en una partida de N artículos) $(0, 1, \ldots, N)$ $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.
   o el nº obtenido al lanzar un dado $(1, 2, \ldots, 5, 6)$.
3. Nº de posajeros que usa el metro $\Omega = \mathbb{N}$.
4. Tiempo que dura una pila $(0 < t < \infty)$

PROARTE

Def: Diremos que A es un **evento** si $A \subseteq \Omega$.
A **ocurre** ssi ω es el resultado del experimento y $\omega \in A$.

Ejemplo:
$A = \{\omega\}$ → evento elemental.
$A = \Omega$ → evento seguro.
$A = \emptyset$ → evento imposible.
A^c ⇒ evento complementario (o contrario al evento A) $= \{\omega : \omega \in \Omega, \omega \notin A\} = \Omega - A$.

Dados 2 eventos A y B:
- → $A \cup B$ = ocurre A o B $= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$
- → $A \cap B$ = ocurre A y B $= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
- → $A \subset B$ = si A ocurre, entonces B ocurre.
- → $A \cap B = \emptyset$ ⇒ A y B son elementos **disjuntos**
- → $A \Delta B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cup B - A \cap B$



Notación:
- $A \cap B = AB$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A + B$.
- $A \subseteq B \Rightarrow A^c \cap B = B - A$
- $\{A_i\}_{i=1}^{n} = A_1, \ldots, A_n$ sec. finita de eventos.
- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} = A_1, A_2, \ldots$ sec. infinita (numerable) de eventos.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
  ↳ alguno ocurre.
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ → todos ocurren.

PROBARTE

Otras propiedades

- Leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- Leyes Asociativas: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Leyes distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Leyes de Morgan: $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i^c)$

(*) Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección de Eventos.

Lema: Sean $B_1 = A_1$

$B_K = A_1^c A_2^c \cdots A_{K-1}^c A_K$ $\quad K \geq 2$

$\rightarrow B_1 = A_1$

$B_2 = A_1^c A_2$

$B_3 = A_1^c A_2^c A_3$

$\Rightarrow$ i) $B_1, B_2, \ldots$ son disjuntos 2 a 2. ($B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$)

ii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Dem) Tarea.

- Def:
  - $\limsup_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{i=K}^{\infty} A_i$ → ocurre un nº infinito de A_i
  - $\liminf_{n \to \infty} A_n = \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{i=K}^{\infty} A_i$

    ↓ todos ocurren salvo un nº finito de A_i

- Def: $\{A_n\}_{n \geq 1}$ se dice convergente si $\limsup_{n} A_n \subseteq \liminf_{n} A_n$

  ssi $\limsup A_n = \liminf A_n = \lim A_n$.

PROARTE

Martes 7.03.17.

Def: Secuencias Monótonas.

i) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow \{A_n\}_n$ es monótona creciente

Por ejemplo $A_n = \bigcap_{m \geq n} B_m \quad \forall B_1, B_2, \ldots$

ii) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow \{A_n\}$ es monótona decreciente

Por ejemplo $A_n = \bigcup_{m \geq n} B_m \quad \forall B_1, B_2, \ldots$

Teorema:

- $\{A_n\}_{n \geq 0} \uparrow \Rightarrow \lim A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- $\{A_n\}_{n \geq 0} \downarrow \Rightarrow \lim A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Ejemplo

- $B(n) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}$
  $C(n) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < n^2\}$

(a) $A_n = B\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow A_n \downarrow$

$\Rightarrow \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(1 + \frac{1}{n}) = C(1)$

(b) $A_n = C\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow A_n \uparrow$

$\Rightarrow \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(1 - 1/n) = B(1)$

(c) $A_n = B(1 + 1/n) \quad n = \text{impar}$
$= B(\frac{1}{3} - 1/n) \quad n$ par

$\Rightarrow B(2), B(1/12), B(4/3), B(5/24), \ldots$
no es monótona.

PROARTE

Además (tarea)

- $\limsup A_n = C(1)$ $\Rightarrow$ A_n no converge.
- $\liminf A_n = B(1/3)$

Definido Ω (esp. muestral) debemos describir el aspecto aleatorio del experimento, es decir, asignar "probabilidades" a los "eventos" de interés.

*Problema:

1) ¿Cómo "medido" la incertidumbre asociada al evento de interés?
   R. Definimos una "medida de probabilidades".

2) ¿Qué subconjuntos de Ω "podemos" (o deseamos) medir?
   R. Definir determinado dominio de una medida de probabilidad.

→ Notemos primero que Ω puede ser:

- Finito
- Inf. numerable (Pois)
- Inf. no-numerable (Normal)

Ejemplos:

a) $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ n° de fichas
b) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ n° de personas en un paradero.
c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ lanzar un dardo.

PROARTE

3) ¿A qué subconjuntos de Ω podemos atribuir probabilidades?
¿Sobre qué dominio definiremos nuestra medida de probabilidad?

R. En (a) y (b) el dominio puede ser la colección de todos los subconjuntos de Ω.

$\Rightarrow$ **Dominio = $\mathcal{P}(\Omega)$**

Por ejemplo, nuestra medida de probabilidad puede ser definida por:

- En (a), $\forall \omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{N} \quad \rightsquigarrow \text{Imponer equiprobabilidad.}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) = \frac{\#A}{N} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{posibles}}$$

- En (b) $\quad \omega = \{i\} \quad i = 0, 1, \ldots$

$$P(\{i\}) = p_i \,, \; p_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1} p_i = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) = \sum_{i \in A} p_i$$

Tales medidas no son aplicables en (c).

- En (c) podemos definir, por ejemplo:

$$P(A) = \frac{\text{Area } A}{\text{Area } \Omega} = \frac{A(A)}{\pi} \quad (*)$$

$\forall A \subseteq \Omega$ donde este Área esté bien definida.



PROVARTE

Sin embargo, en teoría, no todo ~~subjun~~ subconjunto de Ω tiene área bien definida.

$\Rightarrow$ No podemos atribuir probabilidades en base a ⊛.

· **Def:** Un subconjunto A (de Ω) al cual podemos atribuir probabilidad será llamado **evento (aleatorio)**

Sea $\mathcal{A}$ la colección de eventos (aleatorios) de Ω

$\Rightarrow \mathcal{A}$ = **σ-álgebra.**

Así c/subconjunto de Ω A es un evento

$\Leftrightarrow A \in \sigma$-álgebra.

· **Def:** $\mathcal{A}$ es un **σ-álgebra** de subconjuntos de Ω ($\mathcal{A} \neq \emptyset$) si

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

(σ-álgebra.)

Nota: $(\Omega, \mathcal{A})$ se llama **espacio medible**

(esp muestral)

· **Prop:** 4) $\emptyset \in \mathcal{A}$
5) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
6) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Dem Tarea.

PROVARTE

Ejemplo

1) Discreto (finito o int. contable)

$A = P(\Omega)$ es un σ-álgebra.

donde, si $\Omega = \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \#P(\Omega) = 2^n$

Tarea: Verifique que $A = P(\Omega)$ es σ-álgebra.

2) $\Omega = (-\infty, \infty)$

Sea A la σ-álgebra por los intervalos de $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) donde $-\infty < a < b < \infty$.

$\Downarrow$

$A = \mathcal{B}$ = Borelianos (σ-álg. de Boriel)

La extensión a $\mathbb{R}^n$ es similar.

Medida de Probabilidad:

Dado un σ-álgebra A de eventos de Ω, para completar nuestro modelo debemos especificar una medida de probabilidad sobre (Ω, A).

- **Def:** Una **medida de probabilidad** P sobre (Ω, A) es una función:

$$P: A \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A)$$ tal que:

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in A$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Si $A_1, A_2, \dots \in A$ son disjuntos (2 a 2) entonces $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

σ-aditividad.

PROARTE

En tal caso, (Ω, A, P) es un modelo ~~espacio~~ ~~matemático~~ de probabilidad.

$\Rightarrow \forall A \in A$, $P(A)$ = Probabilidad de que, al realizar el experimento, ocurra el evento A.

Ejemplos

1) $\Omega = \{c, s\}$, $A = \{\emptyset, \{c\}, \{s\}, \Omega\}$

$P: A \longrightarrow [0,1]$ dado por

$P(\emptyset) = 0$ $\quad P(\{c\}) = p$ $\quad 0 < p < 1$

$P(\Omega) = 1$ $\quad P(\{s\}) = 1 - p$.

2) $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ $\quad A = P(\Omega)$

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i \qquad \forall A \in A$$

$p_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

Por ejemplo, $p_i = i/6$. $\forall i \in \{1, \ldots, 6\}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{6}$ $\forall A \in A$.

Tarea: $\{1, 2, \ldots, 6\}^2$ ¿cómo medir prob.?

- **Lema:** Sea (Ω, A, P) un mod. de probabilidad, entonces.
  - a) $P(\emptyset) = 0$
  - b) ~~Si~~ $A_1, \ldots, A_n \in A$ disjuntos 2 a 2 se tiene que $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

PROARTE

Jueves 9.03.17.

Dem | Ayudantía.

·Nota: 1) $P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$

2) Una forma equivalente de definir P como medida de prob es:

$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ t.q.

i) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

ii) $P(\Omega) = 1$

*iii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

iv) Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{A}$ converge a $\emptyset$ (monótono decreciente), entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \quad \text{(Ver B. James)}$$

·Propiedades:

Dado un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se desprende de los axiomas 1), 2) y 3) que:

1) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dem $\Omega = A + A^c$

$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ (3)

$1 = P(A) + P(A^c)$ (2)

2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (P no decreciente).

$B = A + A^c B$ (3)

$\Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{\geq 0}$ (1).

$P(B) \geq P(A)$

PROARTE

· **Nota**: Sigue que:

a) $A \subset B \Rightarrow P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(A)$

b) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

P3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$A \cup B = A + A^c B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) \quad (1)$$
$$B = AB + A^c B \Rightarrow P(B) = P(AB) + P(A^c B) \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(AB)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

· **Nota**: c) se puede generalizar a n eventos.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

Dem Se usa inducción (Tarea)

$\boxed{n=3}$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

P4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Dem Sea $B_1 = A_1$

$B_k = A_1^c A_2^c \dots A_{k-1}^c A_k \quad k \geq 2.$

PROARTE

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \quad \text{↓ } B_i \text{ son disjuntos 2 a 2.}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

$$= P(A_1) + \underbrace{P(A_1 \cap {}^cA_2)}_{\subseteq A_2} + \underbrace{P(A_1 \cap {}^cA_2 \cap {}^cA_3)}_{\subseteq A_3} + \dots$$

En general $B_K \subseteq A_K \Rightarrow P(B_K) \leq P(A_K)$

$$\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

5) Continuidad de P.

i) Si $A_n \uparrow \Rightarrow A_n \uparrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim A_n$

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

P es continua para abajo.

ii) Si $A_n \downarrow \Rightarrow A_n \downarrow A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$

$$\Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

P es continua por abajo

Dem i) $A_1 \subset A_2 \subset$

$$A = A_1 + A_1 \cap {}^cA_2 + A_2 \cap {}^cA_3 + \dots$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(A_1 \cap {}^cA_2) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap {}^cA_{i+1})$$

$$= P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap {}^cA_{i+1})$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(P(A_{i+1}) - P(A_i)\right)$$

PROARTE

$$P(A) = P(A_1) + \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} P(A_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i)\right\}$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty}\{P(A_n) - P(A_1)\}$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} P(A_n) - P(A_1) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \;//$$

iii) $A_1 \supset A_2 \supset A_3$

$\Rightarrow A_1^c \subset A_2^c \subset \dots$

por i) $\Rightarrow A_1^c \uparrow A^c$

$\Rightarrow P(A_n^c) \longrightarrow P(A^c)$ mon. creciente.

$\Rightarrow 1 - P(A_n^c) \downarrow 1 - P(A)$

$\Rightarrow P(A_n^c) \downarrow P(A)$ //

■

· **Def:** Un modelo (o espacio) de probabilidad es un trío $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ donde

a) Ω es no-vacío
b) $\mathcal{A}$ es σ-álgebra
c) $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

Interpretación frecuentista de $\mathbb{P}$:

Considere n realizaciones (independientes) de nuestro experimento.

Sea A un evento de interés

- $n_n(A)$ = la frecuencia absoluta de A = # de veces que A ocurre
- $f_n(A)$ = frecuencia relativa de A $= \frac{n(A)}{n}$ $\quad n = n(\Omega)$

1) Claramente $n(A) \geq 0 \Rightarrow f_n(A) \geq 0$

PROPARTE

$n(A) \leq n(\Omega) = n \quad \forall A \quad \Rightarrow 0 \leq f(A) \leq 1.$

$\Rightarrow \quad f(A) \leq 1$

2) Sean A y B dos eventos disjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$f(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B)}{n} = f(A) + f(B).$$

3) En particular $f(\Omega) = 1$

$\therefore nf(A) \geq 0 \quad \forall A$

2) $f(\Omega) = 1$

3) $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ si A y B disjuntos.

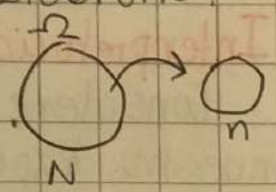
$$f_n(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(A)$$

★ Sea $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un mod. de prob. finito, donde:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Aplique este modelo al muestreo aleatorio.
La muestra puede ser

- Ordenada o no-ordenada
- Con devolución o sin devolución.



★ Estudiemos el caso de muestreo ordenado:

a) Con devolución:

$$N(\Omega) = N \times N \times \dots \times N = N^n$$

b) Sin devolución:

$$N(\Omega) = N \times (N-1) \times \dots \times (N-n) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

PROARTE

Martes 14.03.17.

Ejemplos especiales

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ → contable (discreto)

Sean $p_1, p_2, \ldots$ → colección contable de n° t.q:

(★) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ y $p_i \geq 0$

p.e. $p_i = p(1-p)^{i-1}$ $i = 1, 2, \ldots$ $0 < p < 1$

Defino

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\Downarrow$$

(★★) $$P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i \qquad \forall A \subseteq \Omega$$

es una medida de probabilidad en $P(\Omega)$

$\Rightarrow (\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$ es medida de probabilidad.

Tarea: Verificar que (★★) verifica A1-A2-A3.

$$\mathbb{P}: P(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A) \ (★★)$$

En particular, si Ω es finito.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

$$p_i = \frac{1}{N(\Omega)} \quad i = 1, 2, \ldots, N(\Omega) \text{ verifica (★)}$$

$\Rightarrow$

(equiprobabilidad) $$P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \qquad \forall A \subseteq \Omega$$

$\Rightarrow (\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$ = modelo de ~~prop~~ probabilidad uniforme (equiprobabilidad) discreto.

$$\mathbb{P}: P(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

PROVARTIE

2. Si Ω no contable, por ejemplo

(a) $\Omega = \{\omega = t : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}$

(b) $\Omega = \{\omega = (x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Podemos encontrar una función

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto f(\omega) \quad \text{t.q.}$$

i) $f(\omega) \geq 0$

ii) $\int_{\omega} f(\omega)\,d\omega = 1$

y definir $P(A) = \int_A f(\omega)\,d\omega \quad \forall A \subseteq \Omega$

$\Rightarrow$ $P(A)$ verifica A1-A2-A3 por lo que genera una medida de probabilidad.

Por ejemplo, si definimos

$$f(\omega) = \frac{1}{N(\Omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$$

donde $N(G)$ = largo, área, volumen, ... y $N(G) < \infty$.

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(\omega)\,d\omega = \int_A \frac{1}{N(\Omega)}\,d\omega = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad \forall A \subseteq \Omega$$

($N(A) < \infty$)

donde $N(A)$ = largo, área, volumen, ..., de A.

$\Downarrow$

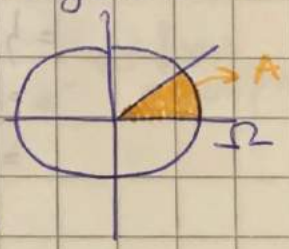
Modelo de probabilidad uniforme y continuo.

PROARTE

Por ejemplo, si $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow P(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(\Omega)}$

Si considero $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 < y \leq x\}$



$$A(A) = \frac{1}{8}\pi \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8} \text{ //}$$

Nota: Área de A debe ser bien definido

p.e. $A = \{(x,y) : x = y\}$.

Métodos de Conteo (Discretos finitos)

Sea $(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$ un modelo de probabilidad discreto ssi $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es contable

En tal caso:

$$(\star)\ P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) \qquad \forall A \subseteq \Omega$$

En particular, si el modelo es equiprobable:

ssi i) $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{N(\Omega)}\}$ es finito

ii) $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N(\Omega)} \quad \forall i \in 1,2,\ldots,N(\Omega)$

En este caso, si

$A = \{\omega_1^*, \ldots, \omega_{N(A)}^*\} \subseteq \Omega$

$\Downarrow \star$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N(A)} \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$\Rightarrow$ basta calcular $N(\Omega)$ y $N(A)$.

PROARTE

Ejemplo

1. Lanzar un dado (honesto) 2 veces.

a. Observar lo que aparece en c/ lanzamiento.

$$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,6\}$$
$$= \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$
$$= \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots 6\}$$
$$= \{1,2,3,4,5,6\}^2$$

Ω_2 → lanzamiento 2°

$$\therefore N(\Omega) = N(\Omega_1) \times N(\Omega_2)$$
$$= 6 \times 6 = 36 //$$

→ Sea A = "N° del 1° lanzamiento sea igual al segundo"

$$A = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,\ldots,6\} \text{ y } i=j\}$$
$$= \{(i,i) : i \in \{1,2,\ldots,6\}$$
$$= \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$$

(**) $\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ → si el dado es honesto!

→ Si B = "La suma de ambos lanz es 7"

$$= \{(i,j) \; i,j \in \{1,\ldots,6\} \; i+j=7\}$$
$$= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

$N(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} //$

→ $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 2/6 = 1/3 \; (= P(A) + P(B))$

PROARTE

b. Observar la suma obtenida en ambos dados

$\Omega' = \{w : w = 2, 3, \ldots, 12\}$

$= \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$.

$N(\Omega') = 11$

¿Es equiprobable? ¡NO!

$P_{\Omega'}(\{12\}) = P_{\Omega}(\{(1,1),(6,6)\}) = 1/36 \neq \frac{1}{11}$ si fuera equiprobable.

Además

$P_{\Omega'}(\{7\}) = P_{\Omega}(B) = 1/6 \neq 1/11$.

2. a. De un total de 5 personas $\{A, B, C, D, E\}$, se elijen al azar 2 personas para formar una comisión. ¿Cuál es la probabilidad de que "a" este en la comisión?

$\Omega = \{(a,b), (a,c), (a,d), (a,e),$
$(b,c), (b,d), (b,e),$
$(c,d), (c,e),$
$(d,e)\}$ $\quad N(\Omega) = 10$

$N(A) = 4$

$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ Pues la selección es al azar (muestreo aleatorio).

b. Seleccionar un comité de 10 personas de un total de 100

$N(A) = ?$

$N(\Omega) = ?$

$$\frac{\binom{99}{9}}{\binom{100}{10}} \cdot \frac{1}{100}$$

c. Comité de 10 de un total de 100 — 60 H, 40 M

A = "el comité quedo formado sólo por mujeres.

FROARTE

Nota: 1) Puede interesar el orden de selección
$(a,b) \neq (b,a)$.

2) Una misma puede ser seleccionada más de una vez.

3. Lote con 100 art. → 20 son defectuosos
↘ 80 no son defectuosos

Elegir 10 al azar y observamos

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo artículo es def.} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) : \omega_i = 0,1,\ i = 1,2,\dots,10\}$$
$$= \{0,1\} \times \dots \{0,1\}$$
$$= \{0,1\}^{10}$$

$N(\Omega) = ?$ $\Rightarrow N(\Omega) = 2^{10}$

→ A = "exactamente la mitad de los art. ~~son~~ elegidos son defectuosos"

A ocurre si el resultado del experimento es, p.e,

$$\omega_A = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$P(\omega_A) = \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{1}{2^{10}}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{2^{10}}$$

PROARTE

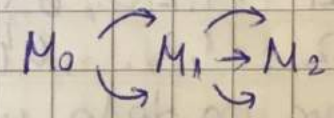
Principio Multiplicativo:

a) $M_0 \; M_1 \; \dots \; M_n \Rightarrow$ Hay $N_1 \times \dots \times N_n$ caminos excluyentes de llegar de M_0 a M_n.

($M_0 \xrightarrow{N_1} M_1 \xrightarrow{N_2} \dots \xrightarrow{N_n} M_n$)

Ejemplo

- $n=2 \quad N_1=2, N_2=3$



$\Rightarrow$ Hay $2 \times 3 = 6$ caminos posibles.

b) Producto cartesiano (ameglos)

$$S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) : s_1 \in S_1, \; s_2 \in S_2\}$$
$$S_1 \to N(S_1) \qquad S_2 \to N(S_2)$$
$$\Rightarrow N(S_1 \times S_2) = N(S_1) \times N(S_2)$$

Más generalmente,

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \; s_i \in S_i \; i \in 1,2,\dots,n\}$$
$$S_i \to N(S_i) \quad i \in \{1,2,\dots,n\}$$
$$\Rightarrow N(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n) = N(S_1) \times \dots \times N(S_n)$$

Ejemplo Experimentos compuestos

El experimento compuesto es el resultado de la realización secuencial de n-sub-experimentos aleatorios.

$\Rightarrow \Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \quad \Omega_i$ = esp. muestral del i-ésimo

Si Ω_i tiene $N(\Omega_i)$ elementos sub-experimento.

$$N(\Omega) = N(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n) = N(\Omega_1) \times \dots \times N(\Omega_n)$$

PROVARUE

1. n lanzamientos de una moneda:

$\Omega_i = \{C, S\} \rightarrow N(\Omega_i) = 2$

$\Omega = \{C, S\}^n \rightarrow N(\Omega) = 2^n$

2. n lanzamientos de un dado

$\Omega_i = \{1, 2, \ldots, 6\} \rightarrow N(\Omega_i) = 6$

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^n \rightarrow N(\Omega) = 6^n$

3. Lanzar un dado y luego una moneda

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{C, S\}$

$\Rightarrow N(\Omega) = 6 \times 2 = 12$ //

Tarea

1. Programación → 1 curso de 3 de Mat
   → 1 " " 2 de Quim
   → 1 " " 2 de Fis

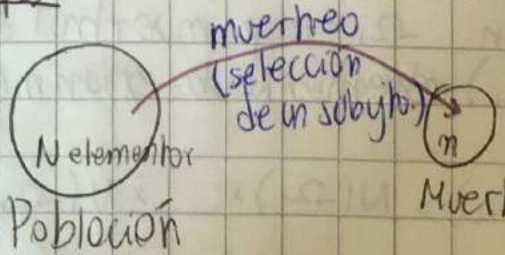
   ¿Cuántos programas distintos pueden formar?

2. 40 alumnos deben calificar con nota $\in \{1, \ldots, 7\}$
   ¿De cuántas maneras ≠ se puede calificar el curso?

3. $\mathbb{N} = \{x_1, \ldots, x_N\}$
   ¿Cuántos elementos tiene $P(\mathbb{N})$?

   R. 2^N.

Ejemplo Muestreo Aleatorio.



c/elemento de la pobl. tiene la misma probabilidad de ser seleccionado.

⇓ equiprobable.

Expto. aleatorio → muestreo aleatorio.

$P(\{\omega\}) = \frac{1}{N(\Omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$

Jueves 16.03.17.

ω = posible muestra de tamaño (n) de una población con N sujetos.
= n-duplas de sujetos de la población
$N(\Omega)$ = Nº de muestras posibles de tamaño n de una población con N sujetos.

Posibilidades (en Teoría)

Muestreo → ordenado → c/devolución
→ s/ "
→ desordenado (no-ordenado) → c/ "
→ s/ "

=> 4 tipos de muestreo.

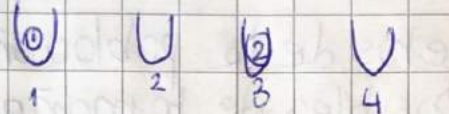
Analogía (ocupación).
Extraer una muestra de tamaño n de una población con N elementos
⇕
Distribuir n fichas en N urnas numeradas.

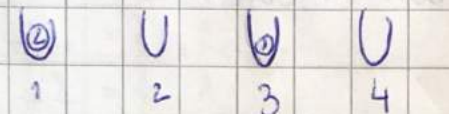
Muestra
ordenadas
no-ordenadas
c/d
s/d

dist. de fichas
diferenciables (dis. numeradas)
no-diferenciables.
s/ exclusión de urnas.
c/ " " " .

PROARTE

Por ejemplo, si $N=4$, $n=2$





- Si interese el orden $(1,3) \neq (3,1)$
- Si no, $(1,3) = (3,1)$

Nuestro problema: ¿ $N(\Omega)$?

↳ N° de formas de elegir n elementos de una población tamaño N.

Resultados:

I. Muestra ordenada con devolución:
(fichas diferenciables, sin exclusión de urna)

$\Rightarrow N(\Omega) = N^n$

Dem/ N formas de elegir al 1° sujeto
N " " " " 2° "

N " " " " n° " .

Por Princ. multiplicativo $N(\Omega) = N \times N \times \dots \times N$
$= N^n$ //

PROARTE

Ejemplo

1) $\Pi = \{a, b, c\}$ $\quad N = 3,\ n = 2$

(a,a) (a,b) (a,c)
(b,b) (b,a) (b,c)
(c,c) (c,a) (c,b) $\Rightarrow N(\Omega) = 3^2 = 9$

$\Rightarrow$ arreglos de $\Pi^2 = \{a,b,c\}^2$

2) De cuantas maneras 10 personas pueden tener cumpleaños el mismo día.

$N = 365$
$n = 10 \Rightarrow$ ord c/d
$N(\Omega) = 365^{10}$

(distribuir 10 fichas diferenciables en 365 urnas c/rep)
(s/exclusión)

II. Muestra ordenada s/devolución: (permutaciones).
(fichas diferenciables, c/excl.)

$$N(\Omega) = (N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\cdots(N-(n-1))$$

Dem/ N maneras de elegir el 1° elemento
N-1 " " " " 2° "
$\vdots$
N-(n-1) " " " " n° elemento

Por Pric. multiplicativo $N(\Omega) = N \times (N-1) \times \cdots \times (N-(n-1))$

$$= \frac{N!}{(N-n)!}$$ //

PROARTE

Ejemplo

1. $\Upsilon = \{a, b, c\}$ $N = 3, n = 2$

(a,b) (a,c)
(b,a) (b,c) $\Rightarrow N(\Omega) = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 = 6$ //
(c,a) (c,b)

2. Maneras en que 10 personas tiene cumpleaños sin repetir fechas.

$N(\Omega) = (365)_{10}$

$= \frac{365!}{(365-10)!}$

(distribuir 10 fichas diferenciables en 365 urnas de exclusión de orden).

Casos especiales:

a) Permutaciones s/repetición:

ssi sacamos una muestra ordenada (s/d) de tamaño n de una población de n elementos.

$\Rightarrow N(\Omega) = (n)_n = n!$ resultados posibles.

ssi hay n! maneras de reordenar (permutar) n elementos diferentes (n-duplas distinguidas) de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Ejemplo

- El nº de permutaciones de (a,b,c) son: $6 = 3!$ $\{(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)\}$

PROARTE

b) Permutaciones c/ repetición

$n \rightleftarrows x_1, x_2, \dots, x_k$ $\quad$ k tipos diferentes

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \;, \quad x_i = 0, \dots, n$$

N° de permutaciones distintas
(n°duplas distinguibles)

$\Rightarrow$ N° de maneras de reordenar los n elementos es

$$\frac{n!}{x_1! \, x_2! \dots x_k!} = \binom{n}{x_1 \; x_2 \dots x_k} \rightarrow \text{coef. multinomial.}$$

Nota: $$\sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n} \dots \sum_{x_n=0}^{n} \binom{n}{x_1 \; x_2 \dots x_n} = n^n$$

Dem $\quad X$ = n° de n-duplas distintas

$$n! = X \cdot x_1! \dots x_k!$$

Ejemplo

- Permutaciones de (a, a, b)

$$\left.\begin{matrix} (a,a,b) \\ (a,b,a) \\ (b,a,a) \end{matrix}\right\} N(\Omega) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \;//$$

- Permutaciones de $(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-x}, \underbrace{1,\dots,1}_{x})$

$$\Downarrow$$

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$$

PROARTE

· **Nota:** $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} = 2^n$ → coef. binomial.

III. Muestra no-ordenada s/devolución:
(hechos no diferenciables, c/exclusión de orden)
⇓ combinaciones s/repetición.

$$N(\Omega) = C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Dem

X = nº de muestras no-ordenadas s/ repetición

$$\text{Nº muestras ordenadas} = \left(\begin{matrix}\text{Nº muestras} \\ \text{no-ordenadas}\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\text{Manera de} \\ \text{reordenar la} \\ \text{muestra}\end{matrix}\right)$$

$$\frac{N!}{(N-n)!} = X \cdot n! \Rightarrow X = \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!}$$

Ejemplo

· $\Pi = \{a, b, c\}$ $N = 3$
$n = 2$

$$\{(a,b), (a,c), (b,c)\} \Rightarrow \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

· **Propiedades:**

a.) $\binom{N}{n} = 0$ si $n > N$ o $N \leq 0$

b) $\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n}$ elegir n de N = elegir N-n de N.

PROARTE

c) $\binom{N+1}{n} = \binom{N}{n-1} + \binom{N}{n}$

elegir n de N+1 — elegir n-1 de N (excluir al sujeto x) — (muerhas que incluyen a x)

d) $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Dem) Binomio de Newton $a = b = 1$

Aplicaciones:

- $\Pi = \{x_1, \dots, x_n\}$ hay 2^n subconjuntos de Π

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

IV. Muerha no ordenada c/t

(fichas no diferenciables s/exclusión)

⇓ combinaciones c/repención)

$$N(\Omega) = \binom{N+n-1}{n}$$

Ejemplo

$N = 3$, $n = 7$

(distribuir 7 fichas no diferenciables en 3 urnas)

1 2 3 ↔ (0 0 0 0 1 0 0 1 0 *)

0: ficha

1: urna.

$$N(\Omega) = \binom{9}{7} = \binom{3+7-1}{7}$$

PROARTE

· Aplicaciones (tarea):

I. Tirar n dados idénticos.
Sea distribuir n bichos no diferenciables en N = 6 celdas s/exclusión.
$\Rightarrow \binom{6+n-1}{n}$ resultados diferentes.

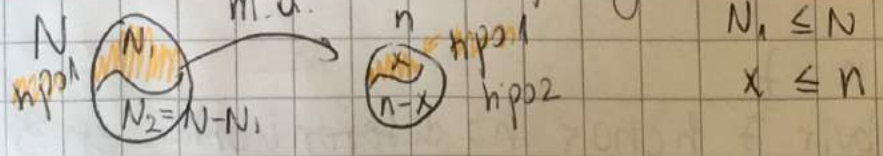
II. N° de soluciones de la ecuación $x_1 + \dots + x_n = n$
$x_i = 0, \dots, n \qquad i = 1, \dots, N$

III. N° de derivadas parciales de orden n de la función
$f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ es $\binom{N+n-1}{n}$ //

Ejemplo
Extraer 13 cartas al azar de una baraja de 52
A = "la mano entera tiene exactamente 2 ases"

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$$

Modelo Binomial e Hipergeométrica



$N_1 \leq N$
$x \leq n$

A = "la muestra contiene exactamente x elementos de hipo I"

PROARTE

Solución para muestreo aleatorio:

a) C/devolución (Binomial)

$$N(\Omega) = N^n = N^x N^{n-x}$$

$$N(A) = \binom{n}{x} N_1^x (N - N_1)^{n-x}$$

$$\omega_A = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-x})$$

$$N_1^x (N - N_1)^{n-x}$$

todos los elementos de A pueden juntarse permutando con elementos de ω_H de $\binom{n}{x}$ maneras.

como $p = \frac{N_1}{N} \Rightarrow P(A) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0, 1, \ldots, n$

↳ modelo binomial (n, p)

b) S/devolución (Hipergeométrica)

$$N(\Omega) = (N)_n = N! \binom{N}{n}$$

$$N(A) = \binom{n}{x} (N_1)_x (N - N_1)_{n-x} = \binom{n}{x} x! \binom{N_1}{x} (n-x)! \binom{N - N_1}{n-x}$$

$$= n! \binom{N_1}{x} \binom{N - N_1}{n-x}$$

PROARTE

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \text{modelo hipergeométrico}$$

$$\max\{0, N+n_1-N\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}$$

⊛ Tarea: $P_H(A) \xrightarrow[N\to\infty]{} P_B(A)$ $\quad p = \frac{N_1}{N}$, n hijos.

Ejemplos:

a) A = "exactamente x caras en n lanzamientos de una moneda honesta"

$p = 1/2$

$$P(A) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

B = "al menos 2 caras en n tiradas"

$$P(B) = \sum_{x=2}^{n}\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - P(B^c)$$

$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

PROARTE

b) Siguiendo las cartas

52 cartas → 4 ases
↓ m.a. → 48 no-ases.
13 cartas → 2 ases
→ 11 no-ases

A = "la mano entera tiene exactamente 2 ases"

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} \quad //$$

B = "la mano tiene 2 aces, al menos" P(A) = ?

PROARTE

Martes 21.03.17.

Probabilidad Condicional

- **Problema:**

$N \rightarrow N(A)$ = tiene cáncer de pulmón

$N \rightarrow N(B)$ = fumen.

Si una persona elegida al azar es fumador, ¿cuál es la prob. de que tenga cáncer?

Es decir, si tengo info. parcial sobre el resultado del experimento ¿De qué manera esta info. afecta las prob. del evento de interés?

Sea B un evento sobre un mod. de prob. (Ω, A, P)

$\Rightarrow \Omega = AB + A^cB^c + A^cB + A^cB^c \quad \forall A \subseteq \Omega$

$$P(A) = P(AB) + P(AB^c)$$

$\therefore$ La ocurrencia de B descarta la ocurrencia de AB^c.

Dado que B ocurrió, las chances de A se reducen a la ocurrencia del evento AB.

- **En el problema inicial:**

A = "tiene cáncer"

B = "es fumador"

Interesa la prob. de A dado que B ocurrió, es decir, la probabilidad de que un sujeto que fuma tenga cáncer. Denotaremos $P(A|B)$ a esta probabilidad.

PROARTE

Usando equiprobabilidad,

$$P(A|B) = \frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{N(A\cap B)/N}{N(B)/N} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

	B	B^c	
A	$N(AB)$	$N(AB^c)$	$N(A)$
A^c	$N(A^cB)$	$N(A^cB^c)$	$N(A^c)$
	$N(B)$	$N(B^c)$	N

Def: Sean A y B eventos en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con $P(B)>0$. La prob. condicional de A dado B se define como: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $\forall A \subset \mathcal{A}$

Prop: Es fácil ver que $P(A|B)$, $A\in\mathcal{A}$ es una medida de probabilidad, para $B\in\mathcal{A}$: $P(B)>0$

Dem $P(A|B)$ verifica A1-A2-A3.

A1) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \begin{matrix} \geq 0 \\ >0 \end{matrix} \Big\} \geq 0$

A2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ ✓

A3) $A_1, A_2, \ldots$ colección contable de eventos 2-2 disjuntos

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \frac{P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B))}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=\emptyset$ $\quad P(A_i|B)$ ✓

PROARTE

Prop: $P(\cdot|B)$ verifica todas las probabilidades propiedades 1 a 7 demostradas antes.

Dem Tarea.

Nota: Si $P(B) = 0$, $P(A|B)$ puede definirse en forma arbitraria, por ejemplo, $P(AB) = 0$ o $P(A|B) = P(A)$.

Ejemplo

- Se observa si llueve o no en 2 ciudades C_1 y C_2.

$\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si llueve en } C_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\Omega = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$

P 0.5 0.05 0.05 0.4

¿Cuál es la prob. de que llueva en C_2 dado que llueve en C_1?

$A =$ "llueve en C_2" $= \{(1,1), (0,1)\}$

$B =$ "llueve en C_1" $= \{(1,1), (1,0)\}$

$AB = \{(1,1)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\{(1,1)\})}{P(\{(1,1)\} + P(\{(1,0)\})} = \frac{0.5}{0.5 + 0.05} = \frac{0.5}{0.55} = \frac{10}{11} //$$

- Un equipo funciona con 2 hubos: t_1 y t_2

$B_i =$ "T_i funciona bien"

$M_i =$ "T_i funciona mal"

PROARTE

$\Omega = B_1B_2 + B_1M_2 + M_1B_2 + M_1M_2$

P	0.7	0.05	0.10	0.15

$B_1 = B_1B_2 + B_1M_2$

$P(B_1) = P(B_1B_2) + P(B_1M_2) = 0.7 + 0.05 = 0.75.$

$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)} = \frac{0.70}{0.75} = \frac{70}{75}$ #

¿ $P(M_2|B_1) = ?$

·Regla Multiplicativa:

Sean A_1 y A_2 dos eventos en (Ω, A, P) t.q. $P(A_1A_2) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)}$$

Similarmente, para 3 eventos A_1, A_2, A_3: $P(A_1A_2A_3) > 0$

$$P(A_1A_2A_3) = P((A_1A_2)A_3)$$
$$= P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdot P(A_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)$$

Generalizando,

·Prop: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos en (Ω, A, P) t.q. $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$

$$\Rightarrow P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}) = P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)\cdot P(A_{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i)\cdots P(A_1)$$

PROARTE

Ejemplo (Urna de Polya)

- En una urna con n bolitas rojas y b bolitas blancas, se extrae una bolita al azar y se aplica la sig. regla:

i) Si es roja, se devuelve con c bolitas rojas.

ii) Si es blanca, se devuelve con c bolitas blancas.

Este experimento se repite 3 veces.

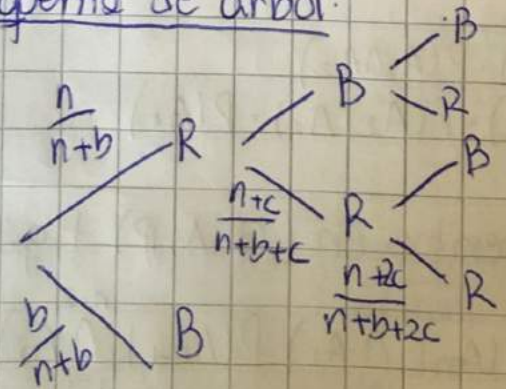
¿Cuál es la prob. de que en las tres extracciones la bolita sea roja"

R. R_i = "roja en la i-ésima extracción" $i = 1,2,3$.

Me piden $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_1 R_2 R_3) = \mathbb{P}(R_3 | R_1 \cap R_2)\cdot \mathbb{P}(R_2 | R_1)\, \mathbb{P}(R_1)$$
$$= \mathbb{P}(R_1)\, \mathbb{P}(R_2 | P_1)\cdot \mathbb{P}(R_3 | R_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{n}{n+b} \cdot \frac{n+c}{n+b+c} \cdot \frac{n+2c}{n+b+2c}$$

- Esquema de árbol:



Tarea: Considerar $n = n_1 + n_2$ extracciones

a) Muestre que la prob. de que los 1° n_1 sean rojas y las n_2 restantes sean blancas es:

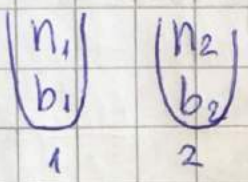
$$(\star) = \frac{n(n+c)(n+2c)\cdots(n-(n_1-1)c)\, b(b+1)\cdots(b+(n_2-1)c)}{(b+n)(b+n+c)(b+n+2c)\cdots(b+n+(n-1)c)}$$

PROARTE

b) Cualquier arreglo con n_1 bolitas rojas y n_2 bolitas blancas tiene la misma prob. dada por (*).

Ejemplo (Feller, pg. 130 - 135)

1.



Elegimos 1 si al lanzar un dado obtenemos un as. De lo contrario elegimos 2.

Considere las extracciones c/d de la urna elegida

$P = (R_1 R_2 \ldots, R_n)$

U_i = "extraccion de la urna i"

$R_1 = R_1 U_1 + R_1 U_2$

$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_1 | U_1)\, P(U_1) + P(R_1 | U_2)\, \mathbb{P}(U_2)$ .... Tarea.

· Regla de Bayes:

Consideremos ahora, dos eventos B_1 y B_2 ~~dependientes~~ disjuntos.

Sea A otro evento: $A \subset B_1 + B_2$

Es claro que AB_1 y AB_2 son disjuntos.

Además $A = A \cap B_1 + A \cap B_2$

$\therefore P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$

regla mult. $\rightarrow = P(A|B_1)\, P(B_1) + P(A|B_2)\, P(B_2)$

$$\Rightarrow \boxed{P(B_1|A)} = \frac{P(B_1 A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)}$$

PROARTE

Para $\mathbb{P}(B_2|A)$ se obtiene un resultado similar.
En general,

Prop: Regla de Bayes.

Sean $A, B_1, \dots, B_n$ eventos en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ t.q:

i) $B_1, \dots, B_n$ son 2 a 2 disjuntos.

ii) $A \subset \sum_{i=1}^{n} B_i$

iii) $P(A) > 0$ y $P(B_i) > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$$

Nota: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$ se llama probabilidad total.

Dem)

$$A = \sum_{i=1}^{n} AB_i = AB_1 + AB_2 + \dots + AB_n$$

es una partición del evento A

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} AB_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(AB_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

Ahora,

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(AB_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)} \checkmark$$

PROARTE

· **Nota** 1) En la práctica, los eventos $B_1, \dots, B_n$ es una partición de Ω si:

a) $B_i B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (mutuamente excluyentes)

b) $\bigcup_{i=1} B_i = \Omega$ (exhaustiva)

2) · $P(B_i)$ $i \in \{1, \dots, n\}$ se llaman probabilidad a priori

3) · $P(B_i|A)$ $i \in \{1, \dots, n\}$ se llaman probabilidad a posteriori.

· $P(A|B_i)$ $i \in \{1, \dots, n\}$ se llama verosimilitud

3) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) P(B_i)$ se llama probabilidad total.

Ejemplo

· Lote 1 → 3M (Mala calidad)
↳ 5B (Buena ")

· Lote 2 → 8M
↳ 2B

Se elige un lote al azar y se extrae un objeto del lote elegido

¿Cuál es la prob. de que el objeto pertenezca al Lote 1

L_i = "elegir lote i"

M = "el objeto de mala calidad"

$$P(L_1|M) = \frac{P(M|L_1) P(L_1)}{P(M|L_1) P(L_1) + P(M|L_2) P(L_2)} = \frac{3/8 \cdot 1/2}{3/8 \cdot 1/2 + 8/10 \cdot 1/2}$$

$$= \frac{3/8}{3/8 + 8/10}$$

PROARTE

Jueves 23.03.17.

2. E = "estar enfermo" $\quad P(E) = 0.05$.
   $+$: "examen positivo".
   $P(+|E) = 0.9$
   $P(+|E^c) = 0.03$

¿Si el Examen médico es +, cuál es la prob. de que la persona tenga la enfermedad?

$$P(E|+) = \frac{P(+|E)P(E)}{P(+|E)P(E) + P(+|E^c)\cdot P(E^c)}$$
$$= \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 + 0.05 + 0.03 \cdot 0.95}$$

Independencia.

Def: Sean A y B eventos de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ t.q.
Def: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)$$
$$= \mathbb{P}(A|B)\underbrace{(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c))}_{1}$$
$$= \mathbb{P}(A|B)$$

Luego se dice A y B son independientes.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$$
$$= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Es decir, tener información sobre la ocurrencia de B no modifica la probabilidad asociada a la ocurrencia de A.

PROARTE

⇒ $P(A)$ no se ve afectada por el hecho de saber que B ocurrió (o no).

Ejemplo

- Tirar una moneda honesta 2 veces al aire y observar lo que aparece en cada tirada.

$\Omega = \{(c,c),(c,s),(s,c),(s,s)\}$

A = "cara en la segunda tirada"
B = "cara en la primera tirada"

$AB = \{(c,c)\}$
$AB^c = \{(s,c)\}$

$P(A) = P(\{(c,c)\} \cup \{(s,c)\}) = P(\{c,c\}) + P(\{s,c\}) = \frac{1}{2}$

$P(B) = P(\{c,c\} \cup \{c,s\}) = P(\{c,c\}) + P(\{c,s\}) = 1/2$

$P(B^c) = P(\{(s,c)\}, \{(s,s)\}) = 1/2$
$P(AB) = P(\{c,c\}) = 1/4$

⇒ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$

$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$.

⇒ Saber que hay cara en la 1° tirada no permite inferir sobre la prob. de la 2° tirada.

PROARTE

· **Def**: Sean A y B eventos en $(\Omega, \mathbb{P})$
Diremos que A y B son **independientes** si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

· **Nota**: Si $A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow A$ y B son $\perp\!\!\!\perp$ (independientes).

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$
a menos que $\mathbb{P}(A) = 0$ o $\mathbb{P}(B) = 0$.

⇒ La independencia es una **propiedad probabilística**, que no tiene que ver con la relación matemática de los eventos.

· **Nota**: Eventos con probabilidad 0 o 1 son independientes de cualquier otro evento. (Tarea) ✓✓

- $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

- $\mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 1$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1 + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(B) = 1$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
1

PROARTE

Teorema: A y B son independientes

ssi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

ssi $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)$

Dem/ Tarea

Teorema: $A \perp\!\!\!\perp B$ ssi $A \perp\!\!\!\perp B^c$

ssi $A^c \perp\!\!\!\perp B$

ssi $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

(la complementación de uno o ambos eventos no distribuye la independencia)

Dem/ Tarea.

Idea: i) $A \perp\!\!\!\perp B$

$$A = AB + AB^c$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(AB^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$$

$$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))$$

$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c). \checkmark$$

ii) $A \perp\!\!\!\perp B^c \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B$ $\quad B = BA + BA^c$

$$\mathbb{P}(A^c B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

$$= \mathbb{P}(B)(1 - P(A)) = P(A^c)P(B) \blacksquare$$

Ejemplos

1. Tirar una moneda 2 veces al aire.

C_i = cara en la i-ésima tirada

S_i = sello " " " " $\quad i = 1, 2$

$$\Omega = C_1C_2 + C_1S_2 + S_1C_2 + S_1S_2$$

$$\downarrow p^2 \quad \downarrow p(1-p) \quad \downarrow (1-p)p \quad \downarrow (1-p)^2$$

$p \in (0,1)$

p: prob. de cara en 1 lanzamiento.

PROARTE

$C_1 = C_1C_2 + C_1S_2 \Rightarrow \mathbb{P}(C_1) = p^2 + p(1-p) = p^2 + p - p^2 = p$

$C_2 = C_1C_2 + S_1C_2 \Rightarrow \mathbb{P}(C_2) = p$

$\Rightarrow \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = p^2 = \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2)$

$\Downarrow$

$C_1 \perp\!\!\!\perp C_2 \Leftrightarrow S_1 \perp\!\!\!\perp C_2 \Leftrightarrow S_1 \perp\!\!\!\perp S_2 \Leftrightarrow C_1 \perp\!\!\!\perp S_2$.

- Considerar n lanzamientos independientes de la moneda.

$p = \mathbb{P}(C_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

A = "exactamente x caras en n lanzamientos"

$\omega^A = (\overbrace{C \ldots C}^{x}\ \overbrace{S \ldots S}^{n-x}) \in A$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}(\omega^A) = \mathbb{P}(C_A \ldots C\, S \ldots S)$

$= (\underbrace{\mathbb{P}(C) \ldots \mathbb{P}(C)}_{x})(\underbrace{\mathbb{P}(S) \ldots \mathbb{P}(S)}_{n-x})$

$= p^x(1-p)^{n-x}$

$N(A) = \binom{n}{x}$ → permutaciones c/repetición de elementos de ω^A

luego,

$\mathbb{P}(A) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n$

Modelo Binomial(n, p)

Tarea 1: Muestre que en muestreo aleatorio s/devolución $\mathbb{P}(A)$ no depende de si la muestra es ordenada o no-ordenada.

PROARTE

2. Se lanza un dado 2 veces al aire.
A = "as en el 1° lanzamiento".
B = "Par en el 2° lanzamiento". $\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$ ✓✓

3. Permutaciones aleatorias de 4 letras $\{a, b, c, d\}$
Muestre que A = "a precede a b"
B = "c precede a d" son independientes.

4. Familia con 3 hijos
$\Omega = \{HHH, \ldots, MMM\}$

$P(\omega) = 1/8$
A = "la familia tiene a lo más una mujer"
B = "la familia tiene hijos de ambos sexos"
son independientes.

5. Se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas.
A = "Sale rey"
B = "Sale corazón"
$P(A) = 1/13$
$P(B) = 1/4$
$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(B)$ ✓✓ $A \perp\!\!\!\perp B$ ✓

PROARTE

Def: Sean $A_1, \dots, A_n$ eventos de $(\Omega, A, \mathbb{P})$, $A_1, \dots, A_n$ son **mutuamente independientes** si:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad j \in \{1, \dots, j\}$$

Son $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$ que deben verificarse.

Si $n=3$, debemos verificar: $2^3 - 3 - 1 = 4$ igualdades:

1. $\mathbb{P}(A_1 A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)$
2. $\mathbb{P}(A_1 A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_3)$
3. $\mathbb{P}(A_2 A_3) = \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)$
4. $\mathbb{P}(A_1 A_2 A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)$.

Ejemplo

1. Tirar un dado honesto de 4 caras
$\Rightarrow \Omega = \{1,2,3,4\}$ es equiprobable.
$A = \{1,2\}$ $B = \{1,3\}$ $C = \{1,4\}$
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

2 a 2 independientes:
$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$
$\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$
$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = 1/8$

$\Rightarrow A, B, C$ no son mutuamente independientes.

PROVARTE

Fernanda Cores.

Sea X v.a. con f.d.a. dada por:

$$F_X(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2/2 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 1/2+\sum_{i=1}^{k}(1/2)^{i+1} & \text{si} \quad k\le x<k+1 \quad k=1,2,\dots \end{cases}$$

Calcular $\mathbb{E}(X)$ y mediana.

Sea $A=\{a\in\mathbb{R}: \mathbb{P}(X=a)>0\}\neq\emptyset$ pues X ~~es~~ no es continua en su totalidad.

Como X continua en $(-\infty,1)$ y por lo calculado anteriormente $\left(\mathbb{P}(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad k=1,2,\dots \neq 0\right)$

$$A=\{1,2,3,4,\dots\}$$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in A} x\cdot\mathbb{P}(X=x)+\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

donde $f(x)$ coincide con $\frac{dF_X(x)}{dx}$ cuando esto existe y es cero en otro lado.

luego $f(x)=\begin{cases} x^2/2 & x\in[0,1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\mathbb{P}(X=k)+\int_{[0,1)} x\,\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx \quad \text{(prop. de integral)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^k=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad |\alpha|<1 \quad \boxed{\alpha=1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1/2}{(1-1/2)^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{3}\right]\Big|_0^1=1/2\cdot\frac{1}{1/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=1+1/3=\boxed{\frac{4}{3}}$$

Ahora, para el cálculo de la mediana notemos

$$\mathbb{P}(X<1) = F_X(1) - \mathbb{P}(X=1)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{} = \frac{1}{2}$$

- $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)$
$= 1 - F_X(1)$
$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow$ [illegible]
$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$

Suponiendo la sig. definición
"La mediana es tal que:
i) $\mathbb{P}(X \leq \text{Mediana}) \geq 1/2$
ii) $\mathbb{P}(X \geq \text{Mediana}) \geq 1/2$
$\Rightarrow$ 1 es Mediana

Notemos que si tomamos un n° menor a 1, no cumple i), y si tomamos uno mayor o igual a 2 no cumple ii).

Si tomo $k \in (1,2)$

i) $\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X \leq 1) = 3/4 \geq 1/2$ ✓

Sop(X) = {[0,1) ∪ {1,2}} (Mas no hay)

ii) $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X < k)$
$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)$
$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ✗

Luego la mediana es única.

2. Tirar un dado honesto con 8 caras.

$\Rightarrow \Omega = \{1, 2, \ldots, 8\}$ $\quad \mathbb{P}(\{i\}) = 1/8 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$
$C = \{2, 6, 7, 8\}$

$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(\{2\}) = 1/8 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$

Pero

$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\{2, 3, 4\}) = 3/8 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 1/4$

$\Rightarrow$ no son 2 a 2 independientes
$\Rightarrow$ no son mutuamente independientes.

- ~~Regla independen~~
- Regla multiplicativa + independencia.

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots, A_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

- Nota: Si $A_1, \ldots, A_n$ son independientes
$\Rightarrow B_1, \ldots, B_n$ son independientes,
donde $B_i = A_i$ o A_i^c.

PROARTE

Capítulo 2: Martes 28.03.17.

Variables Aleatorias

Queremos observar aspectos numéricos de los resultados del experimento, por ejemplo:

1) N° de caras en n lanzamientos de una moneda
2) N° de defectuosos en una m.a. de tamaño n de una pobl. ~~tamaño~~ N.
3) Relación peso/talla de un recién nacido

Def: Una variable aleatoria es una función

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto X(\omega)$$

$\Rightarrow$ A cada $\omega \in \Omega$ se le asigna un $x = X(\omega) \in \mathbb{R}$

Ejemplo

1. X = N° de caras en 3 tiradas de 1 moneda.

$X(\{sss\}) = 0$ (ω_1)
$X(\{scs\}) = X(css) = X(ssc) = 1$ (ω_2, ω_3, ω_4)
$X(ccs) = X(csc) = X(scc) = 2$ (ω_5, ω_6, ω_7)
$X(ccc) = 3$ (ω_8)

$\Rightarrow X \in Rec(X) = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}$

ω	$X(\omega)$
ω_1	0
ω_2, ω_3, ω_4	1
ω_5, ω_6, ω_7	2
ω_8	3

PROARTE

1. V.A. Indicadora:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modelo de prob.

$A \subseteq \mathcal{A}$, A evento.

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

donde $P(A=1) = P(A)$

$P(A^c = 1) = P(A=0) = 1 - P(A) = P(A^c)$

2. Ensayo de Bernolli:

$\Omega = \{E, F\}$ $\quad P(E) = p \Rightarrow P(F) = 1-p \quad p \in [0,1]$

Observamos la variable aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = E \\ 0 & \text{si } \omega = F \end{cases}$$

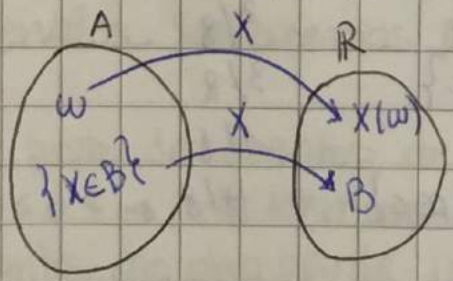
$\Rightarrow$ · $P(X=1) = P(E) = p$

· $P(X=0) = P(F) = 1-p$

Nota: · X es una variable aleatoria definida sobre Ω, si para $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ (medible):

$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$

es un evento en $\mathcal{A}$ (la σ-algebra de Ω).



· Basta exigir que cada $x \in \mathbb{R}$,

$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ es un evento en $\mathcal{A}$.

PROARTE

$\Rightarrow$ X es una función ~~medid~~ medible en $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-medible)

$\Rightarrow \forall B \subseteq \mathbb{R}$ (Boleriano)

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$

Convención:
- $X, Y, Z, \ldots$ denotan w.aa.
- $x, y, z, \ldots$ denotan los posibles valores.

Def: $P_X(B) = P(X \in B)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ se llama distribución de probabilidades de X. ($B \in \mathcal{B}$)

Nota: $P_X(B)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (\Omega, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$

nueva medida de probabilidad

Ejemplo

1. X = nº de caras en 3 lanzamientos de una moneda honesta.

B	$\{X \in B\}$	$P_X(B) = P(X \in B)$
$\{0\}$	$\{sss\}$	$P(sss) = 1/8$
$\{1\}$	$\{css, scs, ssc\}$	$3/8$
$\{2\}$	$\{ccs, scc, csc\}$	$3/8$
$\{3\}$	$\{ccc\}$	$1/8$
$\{0,2\}$	$\{sss, ccs, scc, csc\}$	$4/8$ //

PROARTE

· **Nota (Prop):** $P_X(B)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ puede determinarse de manera única tomando B de la forma:

$$B = (-\infty, x], \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{x \in B\} = \{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dem

$$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$$

$$\Rightarrow P(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \quad //$$

Ahora la evaluación de P_X puede restringirse a los límites de esa forma (s.p.g.)

- $X \in (a,b)$: $a < x < b$
- $X \in [a,b)$: $a \leq x < b$
- $X \in (a,b]$: $a < x \leq b$
- $X \in [a,b]$: $a \leq x \leq b$

} Conocer P_X en estos intervalos $\Rightarrow$ Conocer P_X para cualquier $B \subseteq \mathbb{R}$ (medible).

Por ejemplo, · $P_X((a,b]^c) = 1 - P((a,b])$

$$= 1 - P(a < x \leq b) = 1 - (P(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a))$$

· $P_X((a,b] \cap (c,d]) = P_X((c,d])$

$$= P(c < x \leq b)$$

En realidad basta conocer P_X para una sola clase de estos intervalos. Lo haremos para $(a,b]$ con $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

· **Prop:** La prob. de eventos de la forma $\{a < X \leq b\}$ $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, determina de forma única la prob. de eventos con otro tipo de intervalo.

Dem · $\{a < x < b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a < x \leq b - \frac{1}{n}\}$

· $\{a \leq x \leq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{a - \frac{1}{n} < x \leq b\}$

$$\cdot \{a \le x < b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{a - \tfrac{1}{n} < x \le b - \tfrac{1}{m}\}$$

En general, cada $B \subseteq \mathbb{R}$ (medible) puede generarse para uniones y para intersecciones de la forma $(a_n, b_n]$.

$\Rightarrow$ La colección de intervalos de la forma $(a,b]$, $-\infty \le a \le b \le \infty$ genera una σ-álgebra en $\mathbb{R}$ llamada **σ-álgebra Boreana** y denotada como $\mathcal{B}$. Los elementos $B \in \mathcal{B}$ se llaman **borelianos** y corresponden a los subconjuntos medibles en $\mathbb{R}$.

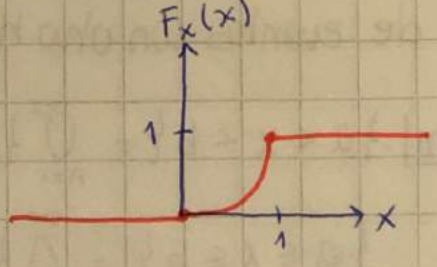
· **Prop**: $P_X(B)$, $B \in \mathcal{B}$, se puede determinar de manera única conociendo tomando B de la forma $B = (-\infty, x]$ $x \in \mathbb{R}$.

· **Def**: $F_X(x) = P_X((-\infty, x])$
$= P_X(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$
se llama **función de distribución acumulada** (f.d.a) de X

Ejemplo

• Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un m.p definido por:
$\Omega = \{w = (u,v) \in \mathbb{R}^2 : \|w\|^2 = (u^2+v^2) \le 1\}$ con $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{área}(A)}{\pi}$, $A \in \mathcal{A}$

Defino v.a.
$X =$ "distancia del punto (u,v) al origen"
$X = X(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$
$0 \le X(w) \le 1 \quad \forall w \in \Omega$
$\Rightarrow Rec(X) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\} = [0,1] \subset \mathbb{R}$.
$\Rightarrow F_X(x) = P(X \le x)$
$= P(\{(u,v) : \sqrt{u^2+v^2} \le x\})$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



· **Nota**: Distintas vv.aa. pueden tener la misma F.D.A.
$F_X(a) = F_Y(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$ ssi $X \overset{d}{=} Y$.

Ejemplo

- Sea X una v.aa con distribución simétrica con el origen
ssi $P(X \le x) = 1 - P(X \le -x)\ \forall x$
ssi $P(X \le x) = P(-X \le x)$
ssi $F_X(x) = F_{-X}(x)$ ssi $X \overset{d}{=} -X$

como



· **Propiedades**: Sea F_X una F.D.A. de una v.aa. Entonces:

F1 a. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

$\Rightarrow F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

Dem Sea $\{x_n\}_{n \ge 1}$, una sec. de números reales.

i) Si $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow \{X \le x_n\} \downarrow \phi$

P.7 $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(X \le x_n) = P(\lim_{n \to \infty} \{X \le x_n\}) = P(\phi) = 0$ //

ii) Si $x_n \uparrow \infty \Rightarrow \{X \le x_n\} \uparrow \Omega$

P.7 $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(X \le x_n) = P(\lim_{n \to \infty} \{X \le x_n\}) = P(\Omega) = 1$ //

F2. Si $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$
F_X es no decreciente.

Dem $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \le x_1\} \subseteq \{X \le x_2\}$
P3 $\Rightarrow P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$
$\Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$.

F3) $\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F_X$ es una función continua por la derecha.

Dem) Sean $x_n \downarrow x_0$ (ejem. $x_n = x_0 + 1/n \downarrow x_0$)

$\Rightarrow \{X \leq x_n\} \downarrow \{X \leq x_0\}$

P7) $\lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = P(\lim_{n\to\infty} \{X \leq x_n\}) = P(\{X \leq x_0\}) = F_X(x_0)$.

· **Nota**: Recíprocamente, sea $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ una función arbitraria. Si F verifica F1 → F3, entonces F es la F.D.A. de alguna v.a. X, tal que $F(x) = F_X(x)$ $x \in \mathbb{R}$.

· **Tarea**: Muestre que $P_X(B)$, $B \in \mathcal{B}$ es una medida de probabilidad $\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ es un modelo de probabilidad.

Jueves 30.03.17.-

· **Prop**: Para calcular $P_X(B)$ con $B \subseteq \mathbb{R}$, basta con calcular $P_X(B)$ para B de la forma $B = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$.

Otras Propiedades:

1. F4) $\lim_{x \uparrow x_0} F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = F_X(x_0^-)$ → pto. inmediatamente anterior

Dem) Tarea. Tomar p.e. $x_n = x_0 - \frac{1}{n} \uparrow x_0^-$ ⟸

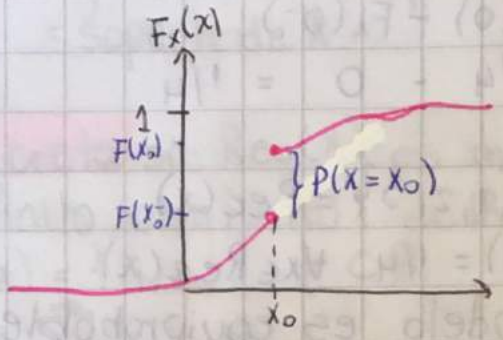
$\Rightarrow \lim x_n = x_0 - \frac{1}{n} \uparrow x_0^- \Rightarrow \{X \leq x_n\} \uparrow \{X \leq x_0^-\}$

$\lim_{n\to\infty} P(\{X \leq x_n\}) \underset{\uparrow P7}{=} P(\lim_{n\to\infty} \{X \leq x_n\}) = P(\{X \leq x_0^-\}) = F_X(x_0^-)$

2. F5) $F_X(x_0) - F_X(x_0^-) = P(X = x_0)$ = "salto de F_X en el punto x_0".

$\Rightarrow F_X$ es una función continua en x_0 ssi $P(X = x_0) = 0$ ssi $F_X(x_0) = F_X(x_0^-)$

Por ejemplo,



$F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$

$P_X(X \leq x_0) - P_X(X \leq x_0^-)$

$\leq$

$P_X(x_0^- < X \leq x_0) = P_X(X = x_0)$

Def: F_X es una función continua en $\mathbb{R}$ ssi $P(X = x_0) = 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

3. P6) i) $P(X > a) = 1 - F_X(a)$

ii) $P(X \geq a) = 1 - F_X(a) + P(X = a)$

iii) $P(X < b) = F_X(b) - P(X = b)$

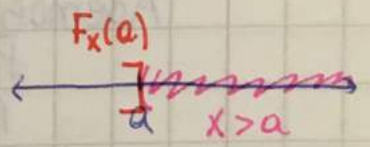
iv) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

v) $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$

vi) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$

vii) $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) - P(X = b)$

Dem! Tarea. Usar diagramas, por ej.:

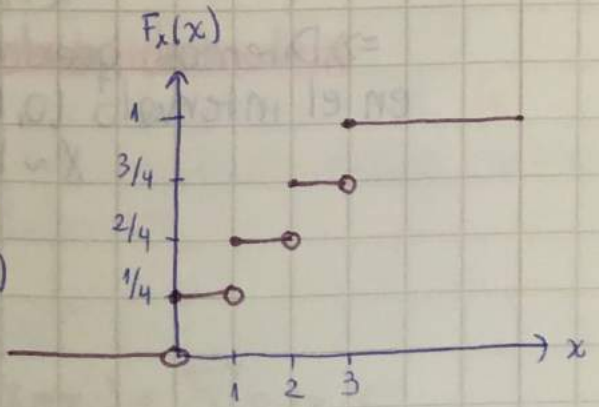


i) $P(X > a) = ? - P(\{X > a\}^c)$

$= 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$

Ejemplo

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/4 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 3/4 & \text{si } x \in [2, 3) \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

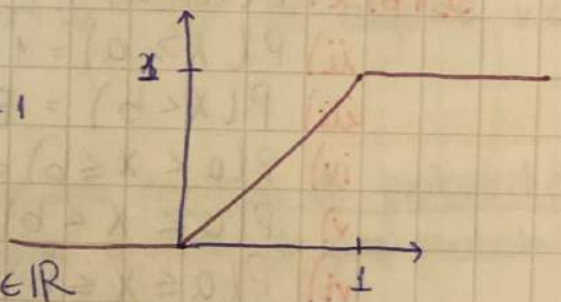


$$P(X=x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$
$$= \begin{cases} 1/4 & \text{para } x_0 = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- $P(X=0) = F_X(0) - F_X(0^-)$
$= 1/4 - 0 = 1/4.$

Note que $X \in \{0,1,2,3\} = Rec(X)$
$P(X=x) = 1/4 \quad \forall x \in Rec(X)$
$\Rightarrow$ El modelo es equiprobable.
y diremos que X distribuye uniforme discreta para $\{0,1,2,3\}$
$\Rightarrow X \sim UD\{0,1,2,3\}$

2. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$



$P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow F_X$ es continua. $\forall x \in \mathbb{R}$.
Además,
$P(X \le 1/2) = F_X(1/2) = 1/2$
$P(X>5) = 1 - F_X(5) = 1-1 = 0$
$P(X<-1) = F_X(-1) - P(X=-1)$
$= 0 - 0 = 0.$
$\Rightarrow$ Diremos que X distribuye uniforme continuo en el intervalo $(0,1)$, es decir,
$X \sim U(0,1)$

Tipos de v.a.:

Sea $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una v.a. en (Ω, P)

X puede ser discreta, continua o mixta.

Sea $Rec(X)$ = cjto. de valores posibles de X
= soporte de X.

· **Def:** X es **discreta** si $Rec(X)$ es un subconjunto **contable** (finito o infinito) de $\mathbb{R}$

ssi $Rec(X) = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

$$X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Sea $p_X(x) = P(X = x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1) $p_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
($p_X > 0$, $\forall x \in Rec(X)$)

2) $\sum_x p_X(x) = 1$

3) $P_X(B) = \sum_{x \in B} p_X(x)$

En particular,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p_X(t)$$

∴ $p_X(x) = P(X = x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$
Se llama **función de probabilidad de X**

· **Nota:** Si $Rec(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\Rightarrow \{X \leq x\} = \bigcup_{i: x_i \leq x} \{X = x_i\} \quad \forall x$$

$$\Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{i: x_i \leq x} p_X(x_i)$$

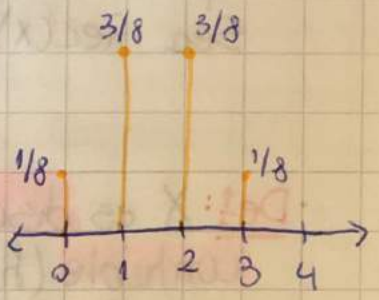
Ejemplo

1. X = N° caras en 3 tiradas de una moneda honesta.

$\Rightarrow Rec(X) = \{0,1,2,3\}$

$\Rightarrow X$ es una v.a. discreta.

$$p_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } x = 0,3 \\ 3/8 & \text{si } x = 1,2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



Además, $P(X \geq 2) = \sum_{x \geq 2} p_X(2) = p_X(2) + p_X(3)$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Tarea: Obtener $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de Distribuciones discretas especiales.

1) $X \in \{0,1\}$ t.q. $P(X=0) = 1-p$

$P(X=1) = p$, $0 \leq p \leq 1$

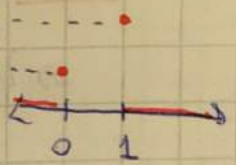
$$p_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\Rightarrow X \sim Bern(p)$

Se dice que X distribuye **Bernoulli** con parámetro p.

2) $X \in \{0,1,\dots,n\}$ $n \geq 1$ t.q.

$$p_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



$\Rightarrow X \sim Bin(n,p)$

Se dice que X distribuye **Binomial** con parámetros $n \geq 1$ y $p \in [0,1]$

Ejemplo

1. Lanzamiento de una moneda al aire.
   1) Defino $X(\omega)$ $\begin{cases} 1 \text{ si sale cara} \\ 0 \text{ si sale sello} \end{cases}$
   $X \sim Bernoulli(1/2)$

2. X = N° de coincidencias en ~~dos~~ dados honestos al lanzarlos 6 veces

$$X \sim Binomial(6, 1/6)$$

3. Lanzar una moneda n veces
   X = n° de caras
   p : prob. de cara

$$P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \{0,1,\dots,n\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$X \sim Binomial(n, p)$.

3) • $X_1 \in \{1, 2, \dots\}$ t.q.

$$p_X(x) = P(X=x) \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\Rightarrow X_1 \sim Geom(p)$

Se dice que X distribuye **Geométrica** con parámetro $p \in [0,1]$

Ejemplo

1. N° de lanz. de 2 monedas honestas hasta obtener una coincidencia $\Rightarrow X_1 \sim Geom(1/2)$
   • $X_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$p_{X_2}(x) = P(X=x) = \begin{cases} p(1-p)^x & x = 0, 1, \dots \\ 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X_2 \sim Geom(p)$

2. N° de sellos al lanzar una moneda hasta obtener una cara.

$$p(ssss\ldots sc) \begin{cases} p(c) = p \\ (1-p)^x p^{**} & x = 0,1,\ldots \\ 0 \end{cases}$$

$$= p_{X_2}(x)$$

$$\boxed{X_2 = X_1 - 1}$$

$\underbrace{FF\ldots F}_{\text{Nº de fracasos hasta el 1º éxito } (X_2)}E \rightarrow$ nº de lanz. hasta el 1º éxito (X_1).

4. • $X \in \{n, n+1, \ldots\}$, $n \geq 1$ t.q.

$$p_X(x) = P(X = x) \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} & x \in \{n, n+1, \ldots\} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$\Rightarrow X \sim BN(n, q)$

Se dice que $X \sim$ Binomial negativa con parámetros $n \geq 1$, $p \in [0,1]$

• $Y = X - n \in \{0, 1, \ldots\}$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(X = n) = \begin{cases} \binom{y+n-1}{n-1} p^n (1-p)^y & y = 0,1,\ldots \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$\Rightarrow Y \sim$ Pascal(n, p)

X distribuye Pascal

Ejemplos

1. X = Nº de lanz. de una moneda hasta obtener n éxitos.

$$P(\underbrace{FFF\ldots F}_{x-n}\underbrace{E\ldots E}_{n}) = p^n (1-p)^{x-n}$$

(E hijo)

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} & x = n, n+1, \ldots \\ 0 \end{cases}$$

$$P(Y=y) = \begin{cases} \binom{y+n-1}{y}(1-p)^y p^n & y = 0,1,\dots \\ 0 \end{cases}$$

5) $X \in \{0,1,\dots\}$

$$P_X(x) = P(X=x) \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0,1,\dots \\ 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$

Se dice que X distribuye **Poisson** con parámetro $\lambda > 0$.

Martes 4.04.17.

Notar que

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1 - e^{-\lambda}.$$

6) **Distribución Uniforme Discreta.**

$X \sim UD\{1,2,\dots,N\}$ si

$$P_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} 1/N & \text{si } x = 1,2,\dots,N \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

· **Def:** Una v.a. X es (absolutamente) **continua** si existe una función no negativa

$$f_X(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty) \text{ t.q.}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

y f_X se llama **función de densidad** de X.

Notar que

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

Notar además que:

1) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (por def.)

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

3) Dem| $F(+\infty) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1.$

3) $P_X(B) = \int_{x \in B} f_X(x)\,dx$

Por ejemplo, $P_X(a < x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

$= F_X(b) - F_X(a)$

$= 0$ si $\underline{b = a}$.

- Por 1) y 2) $\Rightarrow Rec(X) = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$
- Si X continua $\Rightarrow P(X = x) = 0 \ \forall x$
  $\Rightarrow F_X$ es continua.

- **Notar:**

1) X es continua ssi $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^{-1}) = 0 \ \forall x$
   ssi F_X continua para todos los reales.
   En tal caso, $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$

$$P(x < X \leq \Delta x + x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$
$$\approx \Delta x \cdot f_X(x)$$
$$\Rightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

2) Una función (arbitraria) $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es la f.d. de alguna variable aleatoria X ssi

i) $f(x) \geq 0 \ \forall x$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

En efecto, en tal caso, es fácil ver (tarea) que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

verifica F1 - F3

$\Rightarrow F(x) = F_X(x)$ es la f.d.a. de una v.a.

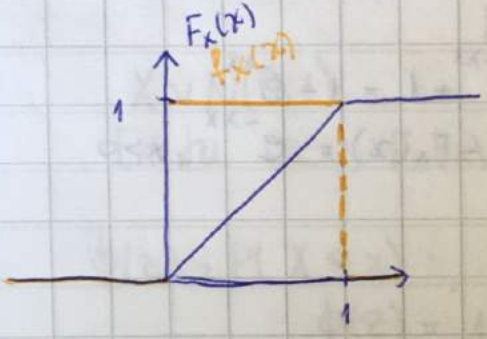
Además,

$$P_X(B) = \int_B f_X(t)\,dt \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Ejemplo

Sea $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow X \sim U(0,1)$ distribuye uniforme en el intervalo $(0,1)$

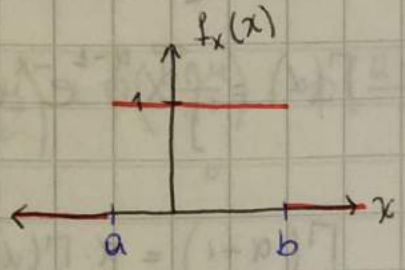
$$P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{\infty} f_X(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad //$$

Ejemplos de distribuciones continuas especiales.

1) X distribuye uniforme en el intervalo (a,b)

$X \sim U(a,b)$ si

$$f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

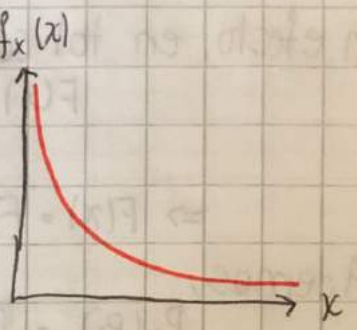


$\Rightarrow Rec(X) = (a,b) \Rightarrow P(a < X < b) = 1$

2) X distribuye **exponencial**

$X \sim E(\lambda)$ con $\lambda > 0$ si:

$$f_X(x) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



$Rec(X) = (0, \infty)$

Sea $a > 0$

- $\dfrac{P(X > x+a)}{P(X>x)} = \dfrac{P(X > x+a,\ X > x)}{P(X>x)} = \dfrac{P(X>x+a)}{P(X>x)}$

$$= \frac{\int_{x+a}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt}{\int_{x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dt} = \frac{1 - \int_0^{x+a} \lambda e^{-\lambda t}\, dt}{1 - \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt} = \frac{1 - F_X(x+a)}{1 - F_X(x)} = (\star)$$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\Big]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$\therefore (\star)$ $\dfrac{e^{-\lambda(x+a)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda a}$ $\forall x$

3) Distribución **Gamma** con parámetros (α, λ):

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$ si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

* $\alpha = 1 \Rightarrow X \sim E(\lambda) = \text{Gamma}(1, \lambda)$
* $\alpha = \frac{n}{2} \Rightarrow$
  $\lambda = 1/2 \quad X \sim \chi^2_n = \text{Gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$
  ↳ chi-cuadrado

4) Distribución **normal** con parámetros μ y σ^2
$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \sigma^2 > 0$

Si $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}$, $x \in \mathbb{R}$.

* Si $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ se tiene la distribución **normal estándar**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \Phi(x)$$

$X \sim N(0,1)$
En tal caso, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \Phi(x)$ está tabulado.

$\phi(z) = P(X \leq z), \quad X \sim N(0,1)$
$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

Por ejemplo, $\Phi(1{,}96) = 0.975$
$\Phi(-1{,}96) = 0.025$ $>^+ 1$.

Además, como veremos.
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
ssi $Z = \frac{X-\mu}{\sigma^2} \sim N(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma^2} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma^2}\right) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma^2}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma^2}\right) //$$

Jueves 6.04.17.

Valor Esperado o Esperanza.

Sean $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow Y = g(x)$ tambien es v.a.

Def: Llamaremos **valor esperado** o **esperanza** o la v.a. $g(x)$ al valor definido por:

$$E\{g(x)\} \begin{cases} \sum_x g(x) p_x(x) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x)\, dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Provisto que $\sum_x |g(x) p_x(x)| < \infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_x(x)\, dx < \infty$

($|g(x) p_x(x)|$ = $|g(x)|$)

Ojo: Si X es discreta y $Rec(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$

$$\Rightarrow E(g(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_x(x_i)$$ provisto que la suma converge.

($p_x(x_i)$ = $P(X = x_i)$)

En particular:

a. Si $g(x) = X \Rightarrow E(x) = \begin{cases} \sum_x x\, p_x(x) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\, dx & \text{c.c.} \end{cases}$

es la esperanza o v.e. de X.

$E(X)$ es una medida de localización de la v.a. X

b. Si $g(x) = (X - E(x))^2$

$$Var(x) = E((x - E(x))^2) = \begin{cases} \sum_x (x - E(x))^2 p_x(x) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f_x(x) & \text{c.c.} \end{cases}$$

es la **varianza** de X

Notación:

1. $E(X) = \mu_X$ es medida de localización de la v.a. X.
2. $Var(X) = \sigma_X^2$ es medida de dispersión de la v.a X
   ↳ $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ es la desviación estándar de X

Ojo: Por definición,

$$Var(X) \geq 0 \quad \forall \text{ v.a. } X.$$

Nota: (Desigualdad de Jensen)

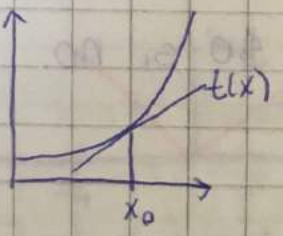
Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa (cóncava) y X v.a. integrable ($E(X) < \infty$)

$$\Downarrow$$

$$E\{g(X)\} \geq g\{E(X)\} \quad (g \text{ convexa})$$

$$(\leq) \quad (g \text{ cóncava})$$

Idea:



$$g(x) \geq \underbrace{g(x_0) + \lambda(x - x_0)}_{t(x)} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $g(x) = |x|$ continua y convexa

$$E(|X|) \geq |E(X)|$$

$\therefore$ Si $E(|X|) < \infty \Rightarrow E(X)$ es finita

$\Rightarrow |X|$ integrable $\Rightarrow X$ integrable.

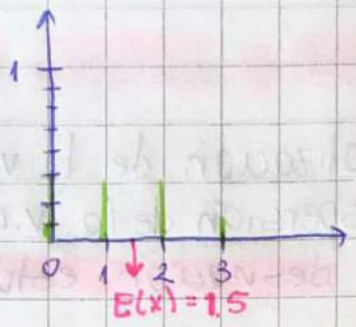
Ejemplo

1. N° caras en 3 tiradas de una moneda honesta

$Rec(X) = \{0, 1, 2, 3\}$

$\downarrow \frac{1}{8} \quad \downarrow \frac{3}{8} \quad \downarrow \frac{3}{8} \quad \downarrow \frac{1}{8}$

$$E(X) = \sum_x x \cdot P_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$



$$Var(X) = (0-3/2)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1-3/2)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2-3/2)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3-3/2)^2 \frac{1}{8}$$

$$= \frac{9}{4}\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\frac{3}{8} + \frac{9}{4}\frac{1}{8}$$

$$= \frac{9}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{12}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{12}{32}$$

$$= \frac{9+3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$$

2. A un evento en (Ω, P) con $P(A) = p$, $P(A^c) = 1-p$
$p \in [0,1]$
Usted gana \$1 si A ocurre y \$0 si no.

Sea X = ganancia obtenida
$Rec(X) = \{0, 1\}$
$P(X=1) = P(A) = p$
$P(X=0) = P(A^c) = 1-p$ $\quad X \sim Bernoulli(p)$

$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$

Interpretación: Sean $\{X_1, \ldots, X_n\}$ los respectivos ganancias en n intentos independientes.

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n(A)}{n} = f_r(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} p = E(X).$$

$\therefore$ $p = E(X)$ representa la ganancia promedio en el largo plazo.

3. X v.a. continua con f.d.

$$f_X(x) = \frac{|x|}{16} \quad \text{si } |x| \le 4$$

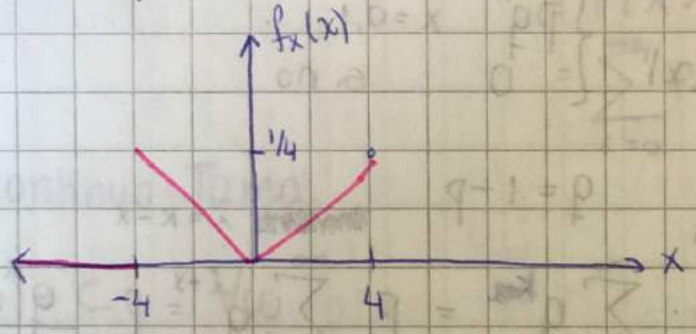
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{|x|>4} x \cdot f_X(x)\,dx + \int_{|x|\le 4} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= -\int_{-4}^{0} \frac{x^2}{16}\,dx + \int_{0}^{4} \frac{x^2}{16}\,dx$$

$y = -x$

$$= \int_{4}^{0} \frac{y^2}{16}\,dy + \int_{0}^{4} \frac{x^2}{16}\,dx = -\int_{0}^{4} \frac{x^2}{16}\,dx + \int_{0}^{4} \frac{x^2}{16}\,dx = 0$$



$f_X(-x) = f_X(x) \quad \forall x$

$Rec(X) = \{x : |x| \le 4\}$

X tiene distribución simétrica con respecto al cero y es limitada

$$\Rightarrow E(X) = 0$$

$$Var(X) = \int_{|x|\le 4} (x-0)^2 \frac{|x|}{16}\,dx = -\int_{-4}^{0} \frac{x^3}{16}\,dx + \int_{0}^{4} \frac{x^3}{16}\,dx$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{4} \frac{x^3}{16}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\, x^4 \Big|_0^4$$

$$= \frac{4^4}{4^3 \cdot 4} = \frac{16}{2} = 8$$

Propiedades básicas:

1. $X(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \Rightarrow E(X) \geq 0$

v.a. no negativa ($P(X \geq 0) = 1$)

Además,

$$\circledast\ E(X) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) & \text{si } Rec(x) = \mathbb{Z}_+ \quad \text{c.d.} \\ \int_0^{\infty} P(X > x)\,dx \ (= 1 - F_X(x)) & \text{si } Rec(x) = \mathbb{R}_+ \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

Ejemplos

a. $X \sim Geom(p)$

$$P_X(x) \begin{cases} pq^x & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$q = 1 - p$

Tarea: $\Rightarrow P(X \geq x) = p \cdot \sum_{k=x+1}^{\infty} q^k = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i+x} = p \cdot \frac{q^x}{1-q} = q^x$ ($i = k - x$)

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} \quad //$$

Tarea: Calcular $E(X)$ usando la definición.

b. $X \sim Exponencial(\lambda) \quad \lambda > 0$

$$f_X(x) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{x} P(X > x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_x^{\infty} = \left(e^{-\lambda t} = 1 - F_X(x)\right).$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^\infty P(X>x)\,dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

· Tarea: Usando la definición calcular la esperanza. //

Dem ④

Caso discreto: X v.a. discreta con valores enteros no-negativos.

pd. $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X>x)$

Por def., $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x) = 0 \cdot p_x(0) + 1\, p_x(1) + \dots +$

$= p_x(1) + p_x(2) + \dots + p_x(n) + \dots$

$+ p_x(2) + p_x(3) + \dots$

$+ p_x(3) + \dots$

$= P(X>0) + P(X>1) + \dots$

$= \sum_{x=0}^{\infty} P(X>x)$

Caso continuo: Tarea.

2. $X(w) = c \quad \forall w$

↳ v.a. degenerada o cte. en c.

$(P(X=c) = 1$ y $P(X=x) = 0 \quad \forall x \neq c$.

$\Rightarrow E(X) = c$

De 1) y 2) Se sigue:

$\mathrm{Var}(X) = E\{\underbrace{(X - E(X))^2}_{\geq 0}\} \geq 0 = 0 \quad$ ssi $\quad X \equiv c$

3. $E(aX+b) = aE(X) + b$ si $E(X)$ finita

Además,

$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

$= a E(X) + b$ //

Tarea: Demostrar. $E(aX+b) = \int (ax+b) f_x(x)\,dx = a\int x f_x(x)\,dx + b \cdot \underbrace{\int f_x(x)\,dx}_{1}$

Martes 11.04.17.

4. $|E(X)| \leq E(|X|)$

es decir $E(|X|) < \infty \Rightarrow |E(X)| < \infty$

$\Rightarrow E(X)$ finita //

- Si X es absolutamente integrable $\Rightarrow |X|$ es integrable.

5. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Note $E(X^2) \geq (E(X))^2$ pues $Var(X) \geq 0 \ \forall x$

Dem| Sea $\mu_X = E(X)$

$$(X-\mu_X)^2 = X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2$$

$$Var(X) = E((X-\mu_X)^2) = E(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu_X \underbrace{E(X)}_{\mu_X} + \mu_X^2$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 \ //$$

Ejemplo

1. $X \sim UD\{1,2,\dots,N\}$

$$P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} 1/N & \text{si } N \in \{1,2,\dots,N\} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \ //$$

$$\circ E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\circ Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{(n-1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

$\therefore X \sim UD\{1,2,\dots,N\}$

$\Rightarrow E(X) = \frac{N+1}{2}$

$\Rightarrow Var(X) = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$

Notas:

Para $k = 1,2,\dots$,
$E(X^k)$ se llama momento de orden k de X

6. Desigualdad de Chebyshev.

Sea Z una v.a. no negativa t.q. $E(Z^2) < \infty$
(luego $E(X) < \infty$ y $Var(X) < \infty$)

$\Rightarrow P(Z \geq \varepsilon) \leq \frac{E(Z^2)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$

Dem| caso continuo.

$$E(Z^2) = \int_0^\infty z^2 \cdot f_Z(z)\,dz = \int_0^\varepsilon z^2 \cdot f_Z(z)\,dz + \int_\varepsilon^\infty z^2 \cdot f_Z(z)\,dz \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\geq \int_\varepsilon^\infty z^2 \cdot f_Z(z)\,dz$$

$$\geq \int_\varepsilon^\infty \varepsilon^2 \cdot f_Z(z)\,dz = \varepsilon^2 \cdot P(Z \geq \varepsilon) \quad //$$

En particular, si X es v.a. tal que $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2 < \infty$
$(Z = |X - \mu_X|)$

$\Rightarrow P(|X - \mu_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$

Ejemplo

1. Considere $n=20$ lanz. de una moneda honesta.
   X = "nº de caras obtenidas"

$$X \sim \text{Binomial}(n,p)$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$y = x-1 \quad = np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y (1-p)^{(n-1)-y}$$

$$= np \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{(n-1)-y}}_{P_Y(x) \text{ si } Y \sim \text{Binomial}(n-1,p)} = np$$

$$\therefore E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Procediendo de manera similar para $E(X^2)$ se llega que

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = \frac{20}{4} = 5$$

$$\Rightarrow P(|X-10| \geq 3) \leq \frac{5}{9} = 0,555\ldots$$

2. Sea X_n = "exitos en n ensayos Bernoulli"
   $X_n \sim \text{Ber}(n,p)$, $p = P(\text{éxitos})$

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = p$$

$$\text{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$\Rightarrow 0 \leq P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow \frac{X_n}{n} \approx p$ con alta probabilidad para n grande.

$\Rightarrow p - \frac{X_n}{n}$ es predictor consistente para p.

Tarea: $E(X)$ y $Var(X)$ en modelos especiales.

4. Caso Discreto.

(1) $X_n \sim UD\{1, \ldots, N\}$

- $p_X(x) = \begin{cases} 1/N & \text{si } x \in \{1, 2, \ldots, N\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $E(X) = \frac{N+1}{2}$
- $Var(X) = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$ //

(2) $X \sim Bernoulli(p)$

- $p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{si } x = 0, 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1-p)$

ojo: $x \in \{0, 1\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow E(x^2) = E(x) = p$

Tarea: $E(x+(1-x))$? $E(x - x^2) = E(x) - E(x^2) = p - p = 0$ //

(3) $X \sim Bin(n, p)$

- $p_X(x) \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $E(X) = pn$
- $Var(x) = p(1-p) \cdot n$

ojo: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(4) $X \sim Geom(p)$

$$p_X(x) \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Si $Y = X - 1 \Rightarrow$ - $E(Y) = \frac{1}{p} - 1$

- $Var(Y) = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

(5) $X \sim BinNeg(n, p)$

- $p_X(x) \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} & x \in \{n, n+1, \dots\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

- $E(X) = \frac{n}{p}$
- $Var(X) = n \cdot \left(\frac{1-p}{p^2} \right)$

(6) $X \sim Hip(N_1, N, n)$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ & N_1 - (N-n) \leq x \leq N \\ 0 \end{cases}$

- $E(X) = n \underbrace{\frac{N_1}{N}}_{p}$
- $Var(X) = n \underbrace{\frac{N_1}{N}}_{p} \left(\frac{1 - \frac{N_1}{N}}{\underbrace{}_{p}} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

(7) $X \sim P(\lambda)$ con $\lambda > 0$

- $P_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , x = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

$\Big\}$ $E(X) = Var(X)$.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \lambda \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!}$$

$$y = x-1 = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}}_{1} = \lambda.$$

B. Caso Continuo.

(1) $X \sim U(a, b)$

- $f_X(x) \begin{cases} 1/b-a & \text{si } x \in (a, b) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $E(X) = (b+a)/2$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a} = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b+a}{2} \; //$$

- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

(2) $X \sim E(\lambda)$ $\lambda > 0$

$$f_X(x) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/\lambda$

$$= \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = -\lambda \int_0^\infty x \cdot \frac{de^{-\lambda x}}{d\lambda} dx$$

- $Var(X) = 1/\lambda^2$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty \right)$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\lambda \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

(3) $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$

- $f_X(x) \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^\infty x \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\lambda x}}_{\text{f.d. de una Gamma}(\alpha+1, \lambda)} dx$$

$$= \frac{\lambda \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

- $E(X) = \alpha / \lambda$
- $Var(X) = \alpha / \lambda^2$.

(4) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$

- $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}$

- $E(X) = \mu$
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}_{\Phi(x|\mu,\sigma^2)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu)\,\Phi(x|\mu,\sigma^2)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\,\Phi(x|\mu,\sigma^2)\,dx}_{0} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x|\mu,\sigma^2)\,dx}_{1} = \mu.$$

$z = x - \mu$

Jueves 13/04/17.

C. Donde $E(x)$ diverge o no está definido.

(1) Se lanza una moneda honesta hasta obtener cara. Si la 1° cara ocurre en el k-ésimo intento, ud. gana 2^k

Sea X = ganancia obtenida

$\mathrm{Rec}(X) = \{2, 2^2, \ldots, 2^k, \ldots\}$

$\mathbb{P}(X = 2^k) = \mathbb{P}(\text{cara en el } k\text{ésimo intento})$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{x}^{\infty} x\, P_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \quad \text{diverge.} \;//$$

(2) Sea X una v.a. simétrica con respecto al origen (continua)

$\Rightarrow f_X(x) = f_X(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot f_X(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

Pero:

$$\int_{-\infty}^{0} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{+\infty}^{0} (-t) f_X(-t)(-dt) \qquad \boxed{x = -t}$$

$$= \int_{+\infty}^{0} t\, f_X(-t)\,dt = \int_{+\infty}^{0} t\, f_X(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx \qquad \text{simetría}$$

$$\therefore \mathbb{E}(X) = -\int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$= 0$ Si $\int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$ es finita.

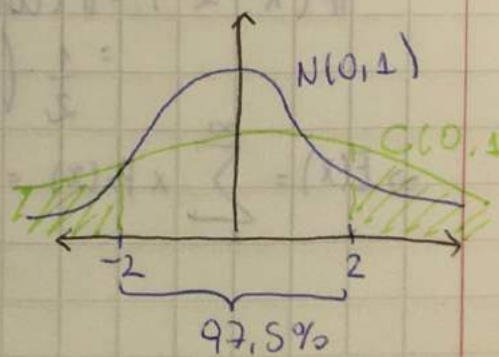
En caso contrario, si $\int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \infty$

$\mathbb{E}(X) = -\infty + \infty$ no está definido.

Ejemplo

1. Si $X \sim Cauchy(0,1)$ tiene f.d. dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$



$$\Rightarrow \int_0^\infty x f_X(x)\,dx \int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^\infty$$

$$= \infty$$

$\therefore E(X) = -\infty + \infty$ indeterminada!

$\Rightarrow$ Esta distribución NO tiene momentos.

Tarea: Encontrar f.d.a. de $X \sim$ Cauchy.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Momentos y funciones generadoras de momentos.

i) Def: $E(X^k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_X(x_i) & \text{e.c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx & \text{e.c.o} \end{cases}$

es el k-ésimo momento (no centrado) de X

Ejemplo

- $k=1 \to E(X)$: esperanza o valor esperado de X
- $k=2 \to E(X^2)$ → segundo momento: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $E(X^k) \geq E(X^{k-1})$

Tarea: Mostrar que

$$E(X^k) = k\left\{\int_0^\infty (1-F_X(x))\,x^{k-1}\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\,x^{k-1}\,dx\right\} \quad k = 1, 2, \ldots$$

ii) Def: $E((X - E(X))^k)$

es el momento centrado de X

Ejemplo

- $k=2 \Rightarrow E((X-E(X))^2) = Var(X)$
- $k=3 \Rightarrow E\left(\left(\frac{X-E(X)}{\sigma}\right)^3\right)$ → coef. de asimetría.

• $k=4$ $\beta_2 \rightarrow \mathbb{E}\left\{\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)^4\right\}$ → coef. de curtosis.

·Tarea: $X \sim N(0,1)$

⇒ coef. de simetría es 0. //

⇒ coef. de curtosis es 3. //

$\gamma_2 = \beta_2 - 3$ ↝ exceso de curtosis.

iii) $\mathbb{E}(|X|^k)$ y $\mathbb{E}\{|X-\mathbb{E}(X)|^k\}$ son los respectivos momentos absolutos centrados y no centrados de orden k.

·Tarea: Si $X \sim N(0,1)$ muestre que

$$\mu_{2k-1} = \mathbb{E}(X^{2k-1}) = 0$$

$$\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad k=1,2,3,\ldots$$

//

·Obs: $X \overset{d}{=} -X \Rightarrow g(X) \overset{d}{=} -g(X)$ $\forall g$ impar.

·Prop:

a. $|\mathbb{E}(X^k)| \leq \mathbb{E}(|X^k|)$ $\forall k>0$.

b. $\mathbb{E}(X^k) < \infty$ (es finita)

$\Rightarrow \mathbb{E}(X^m) < \infty$ $\forall m \leq k$.

c. (D. Markov)

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^t)}{\lambda^t} \quad \forall \lambda>0, \forall t>0.$$

PROARTE

Def: La función generadora de momentos (f.g.m.) de una v.a. X, se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$$

$$= \begin{cases} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx_i} p(X = x_i) & \text{e.c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} f_X(x)\, dx & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

Provisto que la respectiva esperanza sea finita para $|t| < a$, para algún $a > 0$.

Ejemplo

1. $X \sim \text{Binomial}(n, p)$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx})$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} (e^t p)^x (1-p)^{n-x} \binom{n}{x} = (e^t \cdot p + (1-p))^n \text{ es finito } \forall t \in \mathbb{R}.$$

luego $X \sim \text{Binomial}(n, p)$

ssi $f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

ssi $M_X(t) = (e^t \cdot p + (1-p))^n$, $t \in \mathbb{R}$.

$$= 1 + np\frac{t}{1} + [n(n-1)p^2 + np]\frac{t^2}{2} + \ldots$$

PROBARTE

Prop: Si X tiene f.g.m $M_X(t)$, entonces:

i) $\mathbb{E}(X^k)$ es finito $\forall k$
y está dada por $\mathbb{E}(X^k) \left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$.

ii) Si otra variable Y cuya f.g.m. existe se tiene que:
$M_Y(t) = M_X(t)\ \forall t$ sii $X \overset{d}{=} Y$

iii) Si $Y = cX + d$
$\Rightarrow M_Y(t) = e^{td} \cdot M_X(ct)$

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY})$$
$$= \mathbb{E}(e^{t(cX+d)})$$
$$= \mathbb{E}(e^{tcX} \cdot e^{td})$$
$$= e^{td} \cdot \mathbb{E}(e^{tcX}) = e^{td} \cdot M_X(ct) \quad //$$

Dem i)

$$e^{tx} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tx)^i}{i!} = 1 + tx + \frac{1}{2!}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow e^{tx} \overset{d}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tX)^i}{i!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{tx}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i x^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{t^i x^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\mathbb{E}(X^i)$$

↳ converge cerca del origen

$$= 1 + \frac{1}{2!}t\,\mathbb{E}(X) + \dots + \frac{1}{k!} \cdot t^k \mathbb{E}(X^k) + \frac{1}{(k+1)!}t^{k+1}\mathbb{E}(X^{k+1}) + \dots$$

PROARTE

Lunes 18.04.17.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\mathbb{E}(X^k)\right|$$

Obs: $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} x\, dF_X(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x\, dF_X(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\, dx$$

Def: Para la mediana X es un valor m tal que $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$, $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$.

Nota: La función $K_X(t) = \log M_X(t)$ se llama función generadora de cumulantes.

Ejemplo

$X \sim N(0,1)$ ssi $f_X(x) = \phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{\frac{-x^2+tx}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2-t^2)}$$

$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\, dx = e^{t^2/2}$$

$y = x - t$

$X \sim N(t,1)$

$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2}}_{\phi(y)}\, dy = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\, dy = e^{t^2/2} \quad //$$

$\therefore X \sim N(0,1)$ ssi $f_X(x) = \phi(x)$ ssi $M_X(t) = e^{+t^2/2}$

Así

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = t \cdot e^{+t^2/2} = t \cdot M_X(t)$$

$$\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = M_X(t) + t \frac{dM_X(t)}{dt} = 1 \cdot M_X(t) + t^2 M_X(t)$$

$$\boxed{t=0} = M_X(0) = 1$$

- Momentos impares de $X \sim N(0,1)$

$\rightarrow \mathbb{E}(X^{2k-1}) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots$

- Momentos pares de $X \sim N(0,1)$

$\rightarrow \mathbb{E}(X^{2k}) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$

- Además, si

$$Y = \sigma X + \mu \quad , X \sim N(0,1)$$

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{+tY})$$
$$= \mathbb{E}(e^{+t(\sigma X + \mu)})$$
$$= e^{+t\mu}\, \mathbb{E}(e^{+t(\sigma X)}) = e^{+t\mu} \cdot M_X(\sigma t)$$
$$= e^{+t\mu} \cdot e^{1/2(\sigma t)^2}$$
$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ssi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ssi $f_Y(y) = \dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(y-\mu)^2}, \quad y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{E}(Y) = \mu$

$\text{Var}(Y) = \sigma^2$

PROARTE

Def: La función característica (f.c) de una v.a. X, se define por $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itx})$$
$$= \mathbb{E}(\underbrace{\cos(tx) + i\,\mathrm{sen}(tx)}_{\text{v.a. en } \mathbb{C}})$$

Nota: $|\mathbb{E}(e^{itx})| \leq \mathbb{E}(|e^{itx}|)$
$$= \mathbb{E}\left(\sqrt{\cos^2(tx) + \mathrm{sen}^2(tx)}\right)$$
$$= \mathbb{E}(1) = 1$$

Propiedades:

i. $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1 \quad \forall t$

ii. $\overline{\varphi_X(t)} = \mathbb{E}(e^{-itx}) = \varphi_X(-t)$

iii. $\varphi_X(t)$ es uniforme continua.

iv. $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)\ \forall y$ ssi $X \overset{d}{=} Y$

$\varphi_X(t)$ es real ssi $X \overset{d}{=} -X$ (simetría respecto al 0)

v. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{bt}\varphi_X(at)$

vi. si $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty \Rightarrow \varphi_X^{(k)}(0) = i^k\,\mathbb{E}(X^k)$
$k = 1, 2, \ldots$

vii. Si $M_X(t) < \infty$ $\forall |t| < a$ algún $a > 0$
$\Rightarrow \varphi_X(t) = M_X(it)$
con o $M_X(t) = \varphi_X(-it)$

Notas:

1. Si X v.a. continua y $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\,dt < \infty$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(x)\,dx$$

2. Si X es discreta $\Rightarrow$

$$p_X(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{itx} \varphi_X(t)\, dt$$

Def Si X es v.a. no-negativa, también puede considerarse la función generadora definida como:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X), \quad t>0$$

Notar que:

i. Si $M_X(t) < \infty$, $|t|<a$, algún $a>0$

$$G_X(t) = M_X(\log t), \quad t>0$$

ii. Si $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{X(X-1)\cdots(X-(k-1))\} = \frac{d^k G_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=1}$$

iii. Si X es discreta con $Rec(X) = \{0, 1, \ldots\}$

$$G_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot P(X=i)$$

= función generadora de probabilidades (f.g.p.)

En este caso

1) $G_X(t)$ está definido para al menos $|t|<1$

Además $G_X(1) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = 1$

$$G_X(t) = G_Y(t) \Rightarrow p_X(x) = p_Y(x) \ \forall x$$

Ejemplo

1. $X \sim$ Bernoulli Binomial(n,p)

$\Rightarrow G_X(t) = (pt+1-p)^n$

→ Leer Cap 3 Ossella.

Jueves 20.04.17.-

Funciones de v.a.

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ → v.a.
$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ → función real valorada
$\Rightarrow Y = g(X)$ es una v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
Para cada $\omega \in \Omega$ $\quad Y(\omega) = g(X(\omega)) \in \mathbb{R}$

Además, $\forall B \subseteq \mathbb{R}$
$\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(g(X) \in B) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}(B))$

$\therefore \boxed{\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}_X(g^{-1}(B))}$ donde $g^{-1}(B) = \{x : g(x) \in B\}$

Prop: Si $Y \in g(X)$ y $X \sim P_X$
$P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B))$
↑ preimágen, no inversa!

Problema: Dado $P_X(x)$ e.c.d. o $f_X(x)$ e.c.c., cómo llego a $P_Y(y)$ o $f_Y(y)$, respectivamente?

obs:
X v.a. discreta → g(x) v.a. discreta
Y v.a. continua ↛ g(x) v.a. continua.

I. Caso Discreto.

Si X discreta $\Rightarrow Y = g(X)$ es discreta $\forall g$.
Luego

$$P_Y(y) = \sum_{\{x : g(x) = y\}} P_X(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Dem] $P_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y)$
$= \mathbb{P}(g(X) = y)$
$= \mathbb{P}(X \in \{x : g(x) = y\})$
$= \sum_{\{x : g(x) = y\}} P_X(x)$

Nota: Conviene identificar primero:

$$Rec(Y) = \{y : p_Y(y) > 0\}$$
$$= \{y : y = g(x),\ \forall x \in Rec(x)\}$$

Ejemplo

1. $X \sim Bernoulli(p)$, ssi

$$p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$Y = X^2 \sim Bern(p)$ $\quad Rec(y) = \{y : y = x^2,\ x = 0, 1\}$

$$= \{0, 1\} = Rec(x)$$

Dem

$$p_Y(0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 1 - p$$
$$p_Y(1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$$
$$p_Y(y) = P(X^2 = y) = P(X = \sqrt{y}) = 0$$
$$\sqrt{y} \notin Rec(x)$$

$Y^2 \sim Bern(p)$.

2. $X \sim U(-1, 0, 1)$

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/3 & x = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$Y = X^2 \sim Ber(2/3)$

$Rec\ Y = \{0, 1\} \Rightarrow p_Y(y) = 0\ \forall y \notin Rec(Y)$

$p_Y(y) = P(Y = y) = P(X^2 = y) =$

$p_Y(0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 1/3$ ✓

$p_Y(1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1 \cup X = -1)$

$= P(X = 1) + P(X = -1) = 2/3$ ✓ //

$$p_Y(y) \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^y \left(\frac{1}{3}\right)^{1-y} & y = 0, 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

II. Caso Continuo.

Si X continua $\Rightarrow Y = g(X) \rightarrow$ a) discreta
$\rightarrow$ b) mixta
$\rightarrow$ c) continua

Ejemplo

1. $X \sim N(0,1)$

a) $Y = g(X) \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X \leq 0 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X>0) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0)$$
$$= 1 - \Phi(0) = 1 - 1/2 = 1/2$$
$$\mathbb{P}(Y=0) = 1 - 1/2 = 1/2$$
$$Y \sim Ber(1/2)$$
$$E(Y) = 1/2 \,, \quad Var(Y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \,//$$

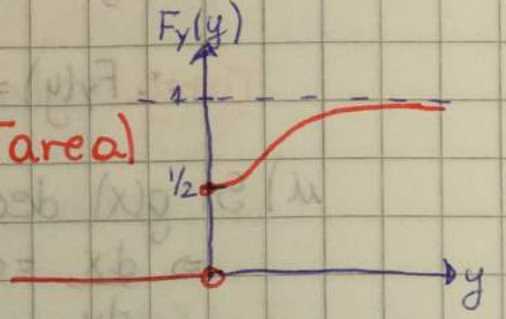
b) $Y = g(X) = \max\{0, X\}$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } X \leq 0 \\ X & \text{si } X > 0 \end{cases} \Rightarrow Rec(Y) = [0, \infty)$$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \Phi(0) = 1/2 \neq 0 \rightarrow Y$ no es v.a. continua.

$$\Rightarrow F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$$
$$\begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2} + \Phi(y) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

(Tarea)



c) $Y = aX + b$
$Y = X^2$
$Y = e^X$
$\Big\}$ Y es continua.

Si X continua y $g(X)$ continua,
¿cuál es su relación?

$$Rec(X) = \{ y : f_Y(y) > 0 \}$$
$$= \{ y : y = g(x) \text{ y } x \in Rec(x) \}$$

(a) Caso biunívoco:

g es $1-1 \Rightarrow$ c/$y \in \mathbb{R}$ $\exists! \, x \in \mathbb{R}$: $x = g^{-1}(y)$

Ejemplo: $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$y = g(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$

$x = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$, $y \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$

Además $g \uparrow$ o $\downarrow$ en x.

Por ejemplo $Y = aX + b$: {crece si $a > 0$
decrece si $a < 0$

(i) Si $g(x)$ creciente:

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} > 0$$

$$\{ Y \leq y \} = \{ g(x) \leq y \}$$
$$= \{ X \leq g^{-1}(y) \}$$
$$\Rightarrow F_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$\therefore F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

ii) Si $g(x)$ decreciente:

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} < 0$$

$$\{ Y \leq y \} = \{ g(x) \leq y \} = \{ X \geq g^{-1}(y) \}$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

$\therefore F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

luego $F_Y(y)$ $\begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \uparrow \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \downarrow \end{cases}$

$\Rightarrow Y = aX + b$

$F_Y(y)$ $\begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Ahora, como Y es continua:

- $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$ $\begin{cases} \frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} & \text{si } g \uparrow \\ -\frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} & \text{si } g \downarrow \end{cases}$

- $= \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$

$= \begin{cases} \frac{dg^{-1}(y)}{dy} f_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \uparrow \\ \frac{dg^{-1}(y)}{dy} f_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \downarrow \end{cases}$

$= \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g^{-1}(y))$

$= \left|\frac{dx}{dy}\right| f_X(x) \Big|_{x = g^{-1}(y)}$.

$Rec(Y) = \{ y : g(x) \ \ x \in Rec(X) \}$

Lunes 25.04.17.-

Ejemplo

1. $Y = aX + b$, $X \sim f_X$, $a \neq 0$

$y = ax + b \iff x = \frac{y-b}{a}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

→ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Rightarrow Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Dem] $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$ $x \in \mathbb{R}$

$x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow y \in \mathbb{R}$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2}\,(2\pi(a\sigma)^2)^{1/2}} \cdot e^{\frac{-1}{2(a\sigma)^2}(y-(a\mu+b))} \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Tarea: Calcular con f.g.m.

En particular, si $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = \frac{-\mu}{\sigma}$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$ → estandarización de la v.a. X

Se obtiene que $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z \sim N(0,1)$.

Similarmente si $Z \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$$

O sea,

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ ssi } Z = \frac{X-\mu}{\sigma^2} \sim N(0,1).$$

Aplicaciones:

1. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Supongo que deseamos calcular

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a-\mu \leq X-\mu \leq b-\mu)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$= \mathbb{P}\left(z \in \left[\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma}\right]\right)$$

$$= F_z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

donde $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \underbrace{(2\pi)^{1/2} e^{-t^2/2}}_{\phi(t)} dt$ que esta tabulada.

Ejemplo

1. Si $X \sim N(2,4)$

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right)$$

$$= \Phi(1/2) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1/2) - (1 - \Phi(1))$$

$$= \Phi(1) + \Phi(1/2) - 1$$

(tabla) $$= 0.8413 + 0.6915 - 1$$

$$= 0.5328$$

Ahora supongamos $X \sim U(a,b)$

$$\Rightarrow Z = \frac{X-a}{b-a} \sim U(0,1)$$

Dem

a. Forma directa $\Rightarrow$ usar el resultado ✓

b. Forma indirecta

$$F_Z(3) = P(Z \leq 3)$$
$$= P\left(\frac{X-a}{b-a} \leq 3\right)$$
$$= P(X-a \leq 3(b-a))$$
$$= P(X \leq (b-a)3 + a)$$

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases} \qquad z = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\Rightarrow F_Z(3) \begin{cases} 0 & \text{si } (b-a)3 + a < a \\ \text{[illegible]} & \text{si } a \leq (b-a)3 + a < b-a \\ 1 & \text{si } b \geq (b-a)3 + a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 1 & \text{si } z \geq 1 \end{cases}$$

Como f v.a. continua

$$f_Z(3) = \frac{d\,F_Z(3)}{dz} \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0,\ z \geq 1 \\ 1 & \text{si } 0 < 3 < 1 \end{cases}$$

ss: $Z \sim U(0,1)$

2. Simulación:

$X \sim F_X(x)$ $\quad Y = F(x)$

↳ f.d. continua ↳ $y = F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \in [0,1] = Rec(Y)$

$\Rightarrow Y = F(x) \sim U(0,1)$

Dem: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ $\quad y \in [0,1]$

$= \mathbb{P}(F(X) \leq y)$

$= \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(y))$ ↳ F no decreciente

$= F_X(F^{-1}(y))$

$= F_X(x)$

$= y \quad 0 \leq y < 1$

- Para $y < 0$, $\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 0$

$= \mathbb{P}(F_X(x) \leq y) = 0$

- Para $y \geq 1$, $\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}(F_X(x) \leq y) = 1$.

3. Sirve para generar números aleatorios $x_1, \ldots, x_n$ a partir de una v.a. $X \sim F_X(x)$

Ejemplo

1. $X \sim Exp(1) \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

Para generar un valor x de esta distribución, opere como sigue:

i) Genere un valor aleatorio $y \in [0,1]$.

$\Rightarrow y = F_X(x) = 1 - e^{-x}$ $\quad (*)$

ii) Despejar x de $(*)$

$x = F_X^{-1}(y) = -\log(1-y)$

Repetir el algoritmo n veces

$\Rightarrow$ generar una muestra aleatoria $x_1, \ldots, x_n$ de $X \sim F_X(x)$

Tarea: • Simular $n = 100$ veces de la $exp(1)$

• Si $U \sim U(0,1)$, Encontrar distribución de $V = -\log(1-U)$

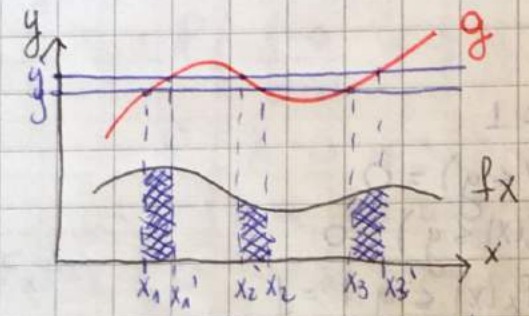
c2. Caso No-biunívoco:

Sea $y = g(x)$ y supongo que para c/$y \in Rec(Y)$ existen k inversos:

$$x_i = g_i^{-1}(y) \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$\Rightarrow$ Una v.a. $Y = g(X)$ tiene distribución dada por

$$f_Y(y) := \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{d\, g_i^{-1}(y)}{dy} \right| f_X(g_i^{-1}(y))$$



$$\mathbb{P}(y < Y < y') = \mathbb{P}(X \in (x_1, x_1')) + \mathbb{P}(x_2' \leq X \leq x_2) + \mathbb{P}(x_3 \leq X \leq x_3')$$

$$|\Delta y|\, f_Y(y) = |\Delta x_1|\, f_X(x_1) + \ldots + |\Delta x_3|\, f_X(x_3)$$

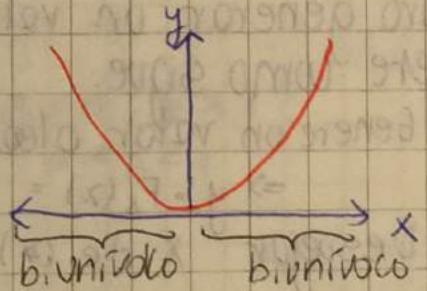
$\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x_i \to 0$

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx_1}{dy} \right| f_X(x_1) + \ldots + \left| \frac{dx_3}{dy} \right| f_X(x_3)$$

Ejemplo

1. La función $y = x^2$ tiene 2 inversos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

$$x_1 = g^{-1}(y) = +\sqrt{y}$$
$$x_2 = g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$



$\Rightarrow y = x^2$ tiene

$$f_X(y) = \left| \frac{d(-\sqrt{y})}{dy} \right| f_X(-\sqrt{y}) + \left| \frac{d(\sqrt{y})}{dy} \right| f_X(\sqrt{y})$$

$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \{ f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \}$ $y>0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} f_X(h) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$ si $X \overset{d}{=} -X$

De otra forma,

$F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$= P(X^2 \leq y)$

$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ ← X es continua

Como Y también es continua

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\sqrt{y})}{dy} - \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{dy}$

$= \frac{dx_1}{dy} \cdot \frac{dF_X(x_1)}{dx_1}\Big|_{x_1=\sqrt{y}} - \frac{d(-\sqrt{y})}{dy} \cdot \frac{dF_X(x_2)}{d(x_2)}\Big|_{x_2=}$ (x_2)

$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) - \left(\frac{-1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(-\sqrt{y}) \right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))$ $y>0$

Tarea:

¿Como distribuye $Y = X^2$ si $X \sim N(0,1)$?

Conclusión: Jueves 27.04.17.-

Si X continua y $Y = g(X)$ continua.

1. Si g es biunívoca $\Rightarrow f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f_X(x) \Big|_{x = g^{-1}(y)}$

especificar $Rec(Y) = \{ y = g(x) \ / \ x \in Rec(X) \}$

2. Si g no es biunívoca

Suponga que para cada $y \in Rec(Y)$ existen n inversas: $x_i = g_i^{-1}(y)$ $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{dx_i}{dy} \right| f_X(x_i) \Big|_{x_i = g^{-1}(y)}$

especificar $Rec(Y)$

Ejemplo

Aplicaciones:

1) $X \sim N(0,1) \Rightarrow Y = X^2 \sim \chi^2_1 \hookrightarrow$ 1 grado de libertad.

Dem)

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-x^2/2} \Rightarrow X \overset{d}{=} -X \text{ (simetrica)}.$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(x)\Big|_{g^{-1}(y)=x} \qquad g^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2}, \quad y>0$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y>0$$

$$\Rightarrow f_Y(y) \begin{cases} \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} & y>0 \\ 0 \end{cases}$$

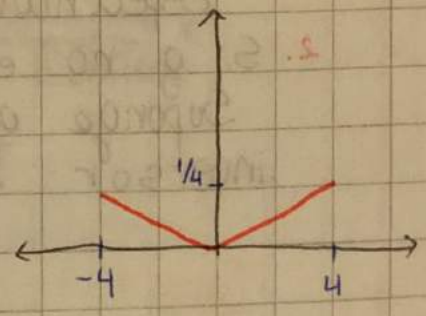
Que corresponde a la densidad de una distribución Gamma(1/2, 1/2)

Por def. $\chi^2_\nu = \text{Gama}(\nu/2, 1/2)$

$\Rightarrow Y \sim \chi^2_1 = \text{gamma}(1/2, 1/2)$.

2) Sea X una v.a. con f.d.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{16} & \text{si } |x| \le 4 \\ 0 & \text{si } |x| > 4 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ a. $X^2 \sim U(0,16)$

b. $Y = |X|$, F_Y?

a. Tarea

b. $F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y)$

$= F_X(y) - F_X(-y) \quad y \geq 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{16} & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 + \frac{x^2}{2 \cdot 16} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$Rec(Y) = \{y : g(x) = y \quad x \in (-4,4)\}$

$= \{y : |x| = y \quad x \in (-4,4)\} = (0,4)$

$\Rightarrow F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y) \quad y \geq 0$

$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) \quad , y \geq 0$

$= 2 \cdot f_X(y)$ pues X es simétrica.

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y/8 & \text{si } 4 > y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y^2/16 & \text{si } 0 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Capítulo 3:

Vectores aleatorios y distribuciones conjuntas (o multivariadas).

Def: $(X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio en (Ω, A, P) ssi $X_1, \dots, X_n$ son v.a. de (Ω, A, P)

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\omega \longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

Ejemplo:

1. Sea A evento en (Ω, A, P)

Defino la v.a. $X_i(\omega)$ $\begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio

En este caso

$(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \{0,1\}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

Note que $P(X_i = 1) = P(A)$

$P(X_i = 0) = P(A^c) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

Las distribuciones marginales son Bernoulli.

$X_i \sim \text{Bern}(P(A))$

$\Rightarrow$ Conocemos las dist. marginales de $X_1, \dots, X_n$

En este caso, $X_1, \dots, X_n$ son v.a. idénticamente distribuidas.

Lo que interesa es estudiar la distribución conjunta de $X_1, X_2, \dots, X_n$

En el ejemplo, $X_1, \dots, X_n$ son discretos luego la distr. conjunta puede describirse a partir de la prob. conjunta dada por:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right)$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Si para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ los eventos $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ son independientes

$$\Rightarrow P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

En este caso,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} & \text{si } x_i = 0,1 \ \forall i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

¿por qué?

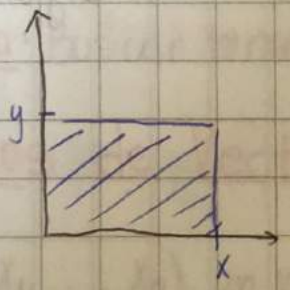
$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i} \begin{cases} x = 0,1 & \forall i \\ \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Pero este ejemplo es muy particular y he construido bajo varias hipótesis.

Para estudiar la dist. conjunta en cualquier evento:

$$\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le x_i\} \text{ para } \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Para $n = 2$, $X_1 = X$, $X_2 = Y$, tenemos:



· **Def:** La f.d.a. conjunta de $(X_1, \dots, X_n)$ se define como sigue:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n) \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Para $n=2$, con $X = X_1, X_2 = Y$ se tiene que

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \quad \text{con } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Al igual que el caso univariado, toda F. D. A. conjunta debe verificar las sig. prop:

Prop: Sea $F_{X,Y}$ la f.d.a. de (X,Y). Entonces:

1. $\lim_{x \downarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \forall y$

   $\lim_{y \downarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \forall x$

   $\lim_{(x,y) \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

2. F_{XY} es una función no-decreciente en c/u de sus argumentos.
   $x < x' \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \leq F_{XY}(x',y) \quad \forall y$
   $y < y' \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \leq F_{XY}(x,y') \quad \forall x$

3. F_{XY} es una función continua por la derecha en cada uno de sus argumentos.

   $\lim_{x \to x_0^+} F_{XY}(x,y) = F(x_0,y) \quad \forall y$

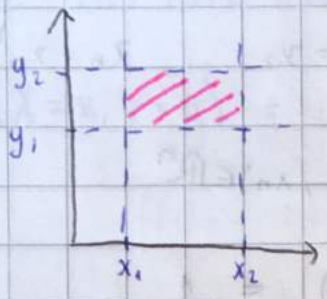
   $\lim_{y \to y_0^+} F_{XY}(x,y) = F(x,y_0) \quad \forall x.$

4. $\forall x_1 < x_2$, $\forall y_1 < y_2$, se tiene que

   $$0 \leq \mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2)$$

   $$F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2) + F_{XY}(x_1,y_1)$$

Martes 2.05.17.-



Recíprocamente, todo función $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica F1-F4 es la F.d.a. de una v.a. (X,Y).

Ejemplo

- Sea $F_{XY}(x,y)$ $\begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x,y \geq 0 \\ 0 & x,y < 0 \end{cases}$
  a. Cumple F1-F4 ✓ (Tarea) ✓✓
  b. Calcular $P(0<X\leq 1, 0<Y\leq 1)$

$$P(0<X\leq 1,\ 0<Y\leq 1) \overset{P4}{=} F_{XY}(1,1) - F_{XY}(1,0) - F_{XY}(0,1) + F_{XY}(0,0)$$

$$= (1-e^{-1})^2 - \underbrace{(1-e^{-1})(1-e^{0})}_{0} - \underbrace{(1-e^{0})(1-e^{-1})}_{0} + \underbrace{(1-e^{0})(1-e^{0})}_{0} = (1-e^{-1})^2 \geq 0$$

Tarea: Buscar función que cumple F1-F3 pero no F4.

1. Tipos de Vectores Aleatorios:

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio definido en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

a. $(X_1, \ldots, X_n)$ es discreto si

$\text{Rec}(X_1, \ldots X_n)$ es un subconj. contable de $\mathbb{R}^n$

ssi $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. discretas.

En este caso la distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ puede representarse mediante la función de probabilidad o frecuencia conjunta definida por:

$p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$

Así se tiene que:

a. $p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

b. $\sum_{x_1}\sum_{x_2}\cdots\sum_{x_n} p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = 1$

c. $P((x_1,\dots,x_n) \in B) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in B}\sum\cdots\sum p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$

$\forall B \subseteq \mathbb{R}^n$

En particular

$$\begin{aligned} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], \dots, X_n \in (-\infty, x_n]) \\ &= \mathbb{P}(\vec{X} \in (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \\ &= \sum_{t_1 \leq x_1} \cdots \sum_{t_n \leq x_n} p_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) \end{aligned}$$

Si $n=2$

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{t\leq x}\sum_{s\leq y} p_{XY}(t,s)$$

En general, $P((X,Y)\in B) = \sum_{(x,y)\in B}\sum p_{XY}(x,y) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^2$

Ejemplo

- Sean A, B dos eventos en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Defino las v.a. $X = \begin{cases} 1 \text{ si } A \text{ ocurre} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} 1 \text{ si } B \text{ ocurre} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$

$\Omega = AB + AB^c + A^cB + A^cB^c$

$$P(X=x, Y=y) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) & \text{si } (x,y) = (1,1) \\ \mathbb{P}(A \cap B^c) & \text{si } (x,y) = (1,0) \\ \mathbb{P}(A^c \cap B) & \text{si } (x,y) = (0,1) \\ \mathbb{P}(A^c \cap B^c) & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$x \backslash y$	0	1	Dist. Marginal
0	$\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$	$\mathbb{P}(A^c \cap B)$	$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(X=0)$
1	$\mathbb{P}(A \cap B^c)$	$\mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(X=1)$
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\mathbb{P}(B^c)$	$\mathbb{P}(B)$	1
	$\mathbb{P}(Y=0)$	$\mathbb{P}(Y=1)$	

tabla de contingencia.

$$Rec(X,Y) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$= \{0,1\} \times \{0,1\}$$
$$= Rec(X) \times Rec(Y).$$

Ahora, las distribuciones marginales son

- $\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

  es la función de probabilidad marginal de X.

En el ejemplo $\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} 1-\mathbb{P}(A) & x=0 \\ \mathbb{P}(A) & x=1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$ $\Rightarrow X \sim Ber(\mathbb{P}(A))$

- $\mathbb{P}(Y=y) = \sum_x \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

  es la función de prob. marginal de Y.

En el ejemplo $\mathbb{P}(Y=y) \begin{cases} 1-\mathbb{P}(B) & y=0 \\ \mathbb{P}(B) & y=1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$ $\Rightarrow Y \sim Ber(\mathbb{P}(B))$

En Particular, si A y B son independientes:

$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A^cB) = \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B) = (1-\mathbb{P}(A))\,\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(AB^c) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))$

$\mathbb{P}(B^cA^c) = \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B^c) = (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \quad \forall x,y.$

ssi X e Y son v.a. <u>independientes</u>

Aquí $X \sim Ber(\mathbb{P}(A))$ si $A \perp\!\!\!\perp B$

$Y \sim Bernoulli\,(p(B))$

Aplicaciones:

1. Lanzar una moneda honesta 2 veces

A = "Sale cara en el 1º lanzamiento"

B = "Sale cara en el 2º lanzamiento"

$\Rightarrow$ A y B son independientes.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((c,c),(c,s)) = 1/2$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((c,c),(s,c)) = 1/2$

$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}((c,c)) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

luego los v.a. asociados son ~~iden~~ independientes.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } x,y = 0,1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ X, Y son i.i.d Bernoulli (1/2)

iid := independientes idénticamente distribuídos.

Jueves 4.05.17

2. Sacar una carta al azar

A = "Sale Rey"

B = "Sale corazones"

$P(A) = 1/13$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{52} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

$P(B) = 1/4$

$\Rightarrow \begin{cases} X \sim Bern(1/13) \\ Y \sim Bern(1/4) \end{cases} \perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$

$$\begin{cases} 1/13 \cdot 1/4 & \text{si } x=y=1 \\ 3/4 \cdot 1/13 & \text{si } (x,y)=(0,1) \\ 1/4 \cdot 12/13 & \text{si } (x,y)=(1,0) \\ 3/4 \cdot 12/13 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. Lanzo dado 2 veces:

A = "suma par" $\rightarrow P(A) = 1/2 = P(B)$

B = "suma impar"

$A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow A \not\perp\!\!\!\perp B \quad B = A^c \Rightarrow X$ e Y no son independientes

$X + Y = 1$

$$P(X=x, Y=y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

b. $(X_1, \dots, X_n)$ es una v.a. continua si existe una función no-negativa $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ t.q.

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \dots dx_1$$

En tal caso: $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{\partial^n F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

y se llama función de densidad conjunta.

Además

(1) $\text{Rec}(X_1,\dots,X_n) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : f_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_n) > 0\}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\,dx_1,\dots,dx_n = 1$

(3) $P((x_1,\dots,x_n)\in B) = \underbrace{\int\cdots\int}_{B} f_{\vec{X}}(\vec{x})\,dx_1\dots dx_n \quad \forall B\in\mathbb{R}^n$

Ejemplo

1. Sean X e Y v.a. con

$$f_{XY}(x,y)\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & \text{si } x,y>0\\ 0 & \text{e.o.c.}\end{cases}$$

Aquí (X,Y) es continua con

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{dx\,dy} = \begin{cases}e^{-x}\cdot e^{-y} & \text{si } x,y>0\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

$$\text{Soporte}(X,Y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$$

$$F_X(x,y) = F_{X,Y}(x,+\infty) = \begin{cases}1-e^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

como X continua $\Rightarrow f_X(x,y) = \dfrac{\partial F_X(x,y)}{\partial x}\begin{cases}e^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$

$=$ f.d. marginal de X

Similarmente,

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty,y)\begin{cases}1-e^{-y} & \text{si } y>0\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

como Y continua $\Rightarrow f_Y(x,y) = \dfrac{\partial F_Y(x,y)}{\partial y}\begin{cases}e^{-y} & \text{si } y>0\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$

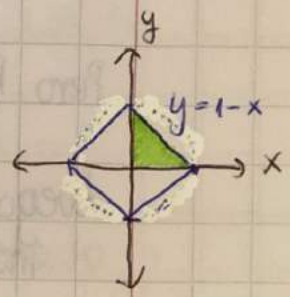
Podemos observar que

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$
$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \iff X \perp\!\!\!\perp Y.$$

Observe que una condición necesaria para tener independencia es

$$Rec(X,Y) = Rec(X) \times Rec(Y).$$

2. Sea $f_{XY}(x,y)$ $\begin{cases} C(|x|+|y|) & \text{si } |x|+|y| \le 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$



Para $f_{X,Y}(x,y)$ sea f.d. $\underline{C>0}$.
Como f debe ser normada.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{|x|+|y|\le 1} C\cdot(|x|+|y|)\,dx\,dy = 1$$

$$= 4\cdot \int\int_{\{(x,y):\, x,y\ge 0,\ x+y\le 1\}} C(x+y)\,dx\,dy$$

$$= 4C\cdot \int_0^1\int_0^{1-y} x+y\,dx\,dy = 4C\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow C = 3/4$$

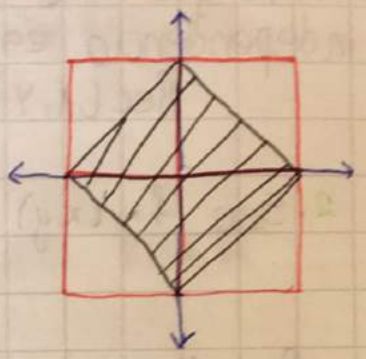
$$\Rightarrow f_{XY}(x,y) \begin{cases} 3/4(|x|+|y|) & |x|+|y|\le 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$ es f.d. de una v.a. (X,Y).

- $P((X,Y)\in B)$ con $B = \{(x,y),\ x,y\ge 0,\ x+y\le 1$

$$= \iint_{\{(x,y):\, x,y\ge 0,\, x+y\le 1\}} \frac{3}{4}(x+y)\,dx\,dy$$

- $$f_X(x) = \frac{3}{4}\int_{-(1-|x|)}^{+(1-|x|)} (|x|+|y|)\,dy = \frac{3}{4}\cdot 2|x|(1-|x|) + \frac{3}{4}\int_{-(1-|x|)}^{+(1+|x|)} |y|\,dy$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3/4\,(1-x^2) & \text{si } |x| \le 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



Similarmente, $Y \overset{d}{=} X$

Pero $\underline{Rec(X,Y)} \neq \underline{Rec(X) \times Rec(Y)}$
$[0,1] \times [-1,1]$

Luego X e Y no son independientes.

Formalización: Distribuciones marginales e independencia de v.a.'s.

a. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto
⇒ la función de prob. marginal de X_1 es

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} p_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

- **Def:** $X_1, \dots, X_n$ son v.a. discretas independientes ssi
$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$

Nota: Una condición necesaria para independencia es $Rec(X_1, \dots, X_n) = Rec(X_1) \times \cdots \times Rec(X_n)$.

Ejemplo

- $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

X \ Y	0	1	P(X = x)
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
P(Y=y)	1/2	1/2	1

⇒ X, Y i.i.d. Bern(1/2).

- $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

X \ Y	0	1	P(X = x)
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
P(Y=y)	1/2	1/2	

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0$
$\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=1) = 1/4$ ≠
no son independientes.

$X \sim Ber(1/2)$
$Y \sim Ber(1/2)$.

b. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ vector aleatorio continuo

$\Rightarrow f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow f(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dx_2 \dots dx_n$$

= f. d. marginal de X.

Las marginales de $X_2, \dots, X_n$ se calculan de modo análogo.

Def: $X_1, \dots, X_n$ son v.a. continuas independientes ssi $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$

Nota: Si $X_1, \dots, X_n$ son v.a. (abs) continuas ($\Leftarrow$)
$\Rightarrow (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

c. En general, n variables aleatorias ssi
$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$
Las marginales se calculan de manera análoga.

2. Esperanza de vectores aleatorios. Jueves 11.05.17.–

$(X_1, \dots, X_n)$ v.a. de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, función real-valorada.

Note que $g(X_1, \dots, X_n)$ es v.a. en $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(g(X_1, \dots, X_n)) \begin{cases} \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) & \text{ec. d} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n)\, f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n & \text{e. c.} \end{cases}$$

(Provisto que la suma e integral son convergentes).

Aplicaciones:

1. $g(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} (X_i a_i + b)$

$$\Rightarrow \cancel{\mathbb{E}(g(X_1, \dots, X_n))}$$
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) + b$$

provisto que $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$.

$\Rightarrow \mathbb{E}\{\cdot\}$ es operador lineal

Ejemplo

- Sea $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

En particular, si X_i son v.a. i.i.d. con media μ

$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$ → media poblacional.

↳ media muestral.

- Si $X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$

$\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ constituyen una m.a. de $X \sim E(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{\lambda} = \mu$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$ es un predictor muestral de μ.

2. f.g.m. multivariada:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{t_i x_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} x_i t_i} \qquad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}.$$

Def: La f.g.m. conjunta de $X_1, \dots, X_n$ es:

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} x_i t_i}\right) = \begin{cases} \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} e^{\sum x_i t_i} \cdot p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum x_i t_i} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Provisto que existen $s_1, s_2, \dots, s_n > 0$ tal que la esperanza exista para $|t_k| < s_k$

Propiedades:

i) $M_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = M_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0) \quad \forall k = 1, \dots, n-1.$

$= $ f.g.m. conjunta de $X_1, \dots, X_k$.

ii) $$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}} M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0} = \mathbb{E}\left(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}\right)$$

momento de orden $(k_1, \dots, k_n)$ de $(X_1, \dots, X_n)$

iii) $X_1, \dots, X_n$ son v.a. $\perp\!\!\!\perp$ ssi $M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = M_{X_1}(t_1) \cdots M_{X_n}(t_n) \quad \forall (t_1, \dots, t_n)$

Dem iii) $\Rightarrow$] def. + independencia

$\Leftarrow$] difícil.

iv) Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \Rightarrow M_Y(t) = e^{bt} M_{X_1, \dots, X_n}(a_1 t, \dots, a_n t)$

Así si $X_1, \dots, X_n$ son $\perp\!\!\!\perp$

$(\Rightarrow) \quad M_Y(t) = e^{kt} M_{X_1}(t_1) \cdots M_{X_n}(t_n)$

En particular, si

$X_1, \dots, X_n$ son v.a. i.i.d. con f.g.m $M_X(t)$

y $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$M_Y(t) = \{ M_X(t) \}^n$$

Ejemplo

- Sean $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Ber(p)

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= e^0 (1-p) + e^t p = \boxed{1 - p + e^t p = M_X(t)}$$

Sean $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right)$$

$$\overset{\text{independencia}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

$$\overset{\text{idénticamente distribuidas}}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{X_1}(t)$$

$$= \left(M_{X_1}(t)\right)^n$$

$$= (1 - p + pe^t)^n$$

$\Leftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n, p)$.

- Sea $\left.\begin{matrix} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2) \end{matrix}\right\}$ ⊥

Sea $Y = X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$

Tarea:
$M_X(t)$ de $\mathcal{U}(0,1)$ ✓
$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0}$ ✓

Dem

$$M_{X_1}(t_1) = e^{t_1\mu_1 + \frac{\sigma^2 t_1}{2}}$$

$$M_{X_2}(t_2) = e^{t_2\mu_2 + \frac{\sigma^2 t_2}{2}}$$

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X_1 - X_2)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1} \cdot e^{-tX_2}\right)$$

independientes $= \mathbb{E}(e^{tX_1})\,\mathbb{E}(e^{-tX_2})$

$$= M_{X_1}(t)\, M_{X_2}(-t)$$

$$= e^{t\mu_1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot e^{-t\mu_2 + \frac{\sigma^2 (-t)^2}{2}}$$

$$= \exp\left\{t(\mu_1 - \mu_2) + \frac{t^2}{2}(2\sigma^2)\right\}$$

$$Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, 2\sigma^2)$$

Tarea: Muestre que si $X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

3. Covariancia y condicional.

$n = 2$ $\quad X_1 = X,\ X_2 = Y$

$$g(X,Y) = (X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\{(X - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\mu_X})(Y - \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\mu_Y})\}$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) P_{XY}(x,y) & \text{e.c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{XY}(x,y) & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

Notación: $\sigma_{XY} = Cov(X,Y)$
= covarianza entre X e Y
= medida de asociación (+ o -) entre X e Y.

Prop:
- $\sigma_{XY} > 0 \Rightarrow$ asociación +
- $\sigma_{XY} < 0 \Rightarrow$ " -
- ($\sigma_{XY} = 0 \Rightarrow$?)

Propiedades de Cov(X,Y)
1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. $Cov(X,c) = 0$ donde c cte.
3. $Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$
4. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

~~5.~~

Fórmula Alternativa:
$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$X \perp\!\!\!\perp Y$
$\Rightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$
$\Rightarrow$ ~~$Cov(g(x) \perp\!\!\!\perp Cov(h(Y))$~~
$\Rightarrow Cov(g(x), h(x)) = 0$

Dem Tarea.

Otras prop:
5. $Cov(X, aX+b) = a \cdot Var(X)$
6. $Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X,Y)$
   $Cov(aX+bY, Z) = a\,Cov(X,Z) + b \cdot Cov(Y,Z)$.
7. $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$

Def: $\rho_{XY} =$ correlación (X,Y)
$= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$

- $\rho_{XY} \leq 1$ con igualdad ss. $Y = aX+b$ o $X = aY+b$ (hay asoc. lineal entre X e Y).
- $\rho_{XY} = 0$ no hay asoc. lineal entre X e Y.

Ejemplo

- $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-2xy) & 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{XY}(x,y)\, dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x,y)\, dy\right)}_{f_X(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\text{Así } E(X) = \int_0^1 x \underbrace{\left(\int_0^1 2(x+y-2xy)\, dy\right)}_{f_X(x)} dx$$

$$= \int_0^1 x \left(2xy + y^2 - 2xy^2 \Big|_0^1\right) dx$$

$$= \int_0^1 x(2x+1-2x)\, dx = \int_0^1 2x^2 + x - 2x^2\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad //$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad X \sim U(0,1)$$

Idem para $Y \sim U(0,1) \Rightarrow E(Y) = 1/2$.

Como $f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1 \neq f_{XY}(x,y)$ no son independientes.

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy(2x+2y-4xy)\, dy\,dx$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$= \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = \frac{8-9}{36} = -\frac{1}{36}$$

Tarea f_{XY} $Var(X) = Var(Y) = 1/12$.

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-1/36}{1/12} = \frac{-12}{36} = -\frac{1}{3}$$

Martes 16.05.17.-

Dem prop 5)

$$Cov(aX+b, X) = \mathbb{E}\left((aX+b - \mathbb{E}(aX+b))(X - \mathbb{E}(X))\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(aX + b - a\mathbb{E}(X) - b\right)(X - \mathbb{E}(X))$$
$$= a\,\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = a \cdot Var(X).$$

Ahora podemos proponer el sig. resultado:
$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ donde a_i son constantes.

Vimos que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \mathbb{E}(X_i) + b)$

Ahora, podemos también afirmar que la varianza:

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \cdot a_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

$Cov(X_i, X_i) = 0$

$$\boxed{Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) a_i^2 + 2 \sum_{i<j} \sum a_i a_j Cov(X_i, X_j)} \quad (*)$$

En particular, si $X_1, \dots, X_n$ son v.a. $\perp\!\!\!\perp$

$$\Rightarrow Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

Ejemplo

- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = Var(X-Y)$.

En general, $\boxed{Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2\,Cov(X, Y)}$ (*)

Dem (*)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(Y))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E}(X_i))\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E}(X_i))\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j (X_j - \mathbb{E}(X_j))\right)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \underbrace{\mathbb{E}\{(X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\}}_{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)} \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{Var}(X_i)}_{\text{cuando } i=j} + \underbrace{2 \cdot \sum_{i<j} \sum \mathrm{Cov}(X_i, X_j) a_i a_j}_{\text{cuando } i \neq j.}
\end{aligned}$$

//

Ejemplo

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ → media poblacional.

  Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, la media muestral

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}) &= \mu \\ \mathrm{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}}$$

→ Importante. → $\bar{X}$ estimador insesgado de μ

→ S_X^2 estimador insesgado de σ^2.

Además si $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ es la varianza muestral.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_x^2) = \sigma^2$$

- **n = 2**

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

- $X_1, \dots, X_n$ v.a. $\perp\!\!\!\perp$ con
$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, \dots, n$
$\Downarrow$ (f.g.m)

$$Y = \sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b) \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Dem)

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{\sum t a_i X_i}\right) e^{tb}$$

$$= e^{tb}\, \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{t a_i X_i}\right)$$

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad = e^{tb} \prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}(e^{t(a_i X_i)})\right)$$

$$= e^{tb} \cdot \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad = e^{tb} \prod_{i=1}^{n} e^{a_i t \mu_i + \frac{1}{2} a_i^2 t^2 \sigma_i^2}$$

$$= e^{tb} \cdot e^{\sum_{i=1}^{n} a_i t \mu_i + \frac{1}{2} a_i^2 t^2 \sigma_i^2}$$

$$= e^{\left(tb + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i t\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 \sigma_i^2) t^2}$$

$$= M^{(t)}_{N\left(b + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i,\ a_i^2 \sigma_i^2\right)}$$

■

- (Normal bivariada)

Sean X, Y v.a. t.q. $\mathbb{E}(X) = \mu_X$, $\mathbb{E}(Y) = \mu_Y$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY}$

$$\mathbb{E}\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{Z} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}}_{\mu}$$

$$\mathrm{Var}\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{Z} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X,X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Cov}(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \Sigma$$

Podemos operar como sigue:

$$\underset{\sim}{Z} \to A\underset{\sim}{z} + b.$$

$$\Rightarrow \cdot \; E(A\underset{\sim}{z} + b) = A\,E(\underset{\sim}{z}) + b = A\mu + b.$$

$$\cdot \; Var(A\underset{\sim}{z} + b) = A\,Var(\underset{\sim}{z})A^T = A\Sigma A^T$$

Defina la forma cuadrática:

$$Q(\underset{\sim}{z}) = (\underset{\sim}{z} - \mu)^T \Sigma (\underset{\sim}{z} - \mu)$$

$$= (X-\mu_X, Y-\mu_Y)\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X-\mu_X \\ Y-\mu_Y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2\sigma_Y^2 - (\sigma_{XY})^2}(X-\mu_X, Y-\mu_Y)\begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_X^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X-\mu_X \\ Y-\mu_X \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sigma_X^2\sigma_Y^2 - (\sigma_{XY})^2}_{>0}}\begin{pmatrix} (X-\mu_X)\sigma_Y^2 + (Y-\mu_Y)\sigma_{XY} \\ -(X-\mu_X)\sigma_{XY} + (Y-\mu_Y)\sigma_X^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X-\mu_X \\ Y-\mu_X \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\sigma_X\sigma_Y)^2(1-\rho_{XY}^2)}\left((X-\mu_X)^2\sigma_Y^2 + \sigma_X^2(Y-\mu_Y)^2 - 2\sigma_{XY}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho_{XY}^2}\left(\underbrace{\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}_{=Q(X)} + \underbrace{\left(\frac{Y-\mu_X}{\sigma_Y}\right)^2}_{=Q(Y)} - 2\rho_{XY}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)$$

Note que $Q(X,Y) = Q(X) + Q(Y) \leftrightarrow \rho_{XY} = 0$ } (*)

Def: $\underset{n\times 1}{\vec{Z}} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$

ssi

$$f_{\underset{\sim}{Z}}(\vec{z}) = f_{Z_1,\dots,Z_n}(z_1,\dots,z_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}Q(\vec{z})} \qquad \vec{z}\in\mathbb{R}^n$$

Si $n=2$

$$(X,Y) \sim N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2\end{pmatrix}\right)$$

SSi $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}$ $\quad x,y \in (-\infty,\infty)$.

Es fácil ver que

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}Q(x)} \longleftrightarrow X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$.

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}Q(y)} \longleftrightarrow Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Jueves 18.05.17

- Distribuciones Multivariadas especiales.

1. Distribución multinomial

Experimento aleatorio con k resultados posibles $R_1, \dots, R_k$ exhaustivo y excluyente, es decir,

$$\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} R_i = \Omega \quad , \quad R_i \cap R_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j.$$

Sea $p_i = p \cdot |R_i| \quad i = 1, \dots, k \Rightarrow p_i \geq 0 \ \ \forall i$ y $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Para n repeticiones de este experimento, considere un vector aleatorio X_i = Nº de veces que ocurre R_i $i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Rec(X_i) = \{0, 1, \dots, n\} \ \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i = n \end{array}}$$

$$\Rightarrow Rec(X_1, \dots, X_k) = \left\{ (x_1, \dots, x_k) : x_i = 0, \dots, n \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i = n \right\}$$

$$\Rightarrow p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} & x_i = 0 \dots n \ \forall i \ \ \sum x_i = n \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

$$\leftrightarrow (X_1, \dots, X_k) \sim Mult(n, p_1, \dots, p_n)$$

$$\leftrightarrow M_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{k} t_i X_i}\right)$$

$$= \sum_{x_k=0}^{n} e^{\sum_{i=1}^{k} t_i x_i} \binom{n}{x_1 \dots x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{n} \dots \sum_{x_k=0}^{n} \binom{n}{x_1 \dots x_k} \underbrace{(p_1 e^{t_1})^{x_1}}_{Q_1} \dots \underbrace{(p_k e^{t_k})^{x_k}}_{Q_k}$$

$$T.M. = \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i \right)^n = (p_1 e^{t_1} + \dots + p_k e^{t_k})^n \quad \forall (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Note que: $x_k = n - \sum_{i=1}^{k-1}$; $p_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$

$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}, X_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} x_k)$

$$= \begin{cases} \left(\frac{n!}{x_1! \cdots x_{k-1}! (n - \sum_{i=1}^{n} x_k)!}\right) p_1^{x_1} \cdots p_{k-1}^{x_{k-1}} \cdot p_k^{n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i} & x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1})$

$\Rightarrow (X_1, \dots, X_k) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_{n-1}, n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i)$

$\Rightarrow (X_1, \dots, X_{k-1}) \sim \text{Mult}(n, p_1, \dots, p_{k-1}, 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i)$

$n \in \mathbb{N}$, $0 \le p_i \le 1$ $\forall i = 1, \dots, k-1$.

$\underline{k=2}$

$(X_1, X_2) \sim \text{Mult}(n, p_1, p_2)$

$\Leftrightarrow (X_1, n - X_1) \sim \text{Mult}(n, p_1, 1 - p_1)$

$\leftrightarrow X_1 \sim \text{Bin}(n, p_1)$

$n - X_1 \sim \text{Bin}(n, 1 - p_1)$ $n \in \mathbb{N}$ $p_1 \in [0, 1]$

En general, $\forall 1 \le m \le k$:

$M_{X_1, \dots, X_m}(t_1, \dots, t_m) = M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$

$= (p_1 e^{t_1} + \dots + p_m e^{t_m} + p_{m+1} + \dots + p_n)^m$

$= (p_1 e^{t_1} + \dots + p_m e^{t_m} + 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i)^m$

$\Rightarrow (X_1, \dots, X_m, n - \sum_{i=1}^{m-1} x_k) \sim \text{Mult}(n, p_1, \dots, p_m, 1 - \sum_{k=1}^{m-1} p_k)$

En particular,

$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$ $i = 1, 2, \dots, k$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_i) = n p_i \quad Var(X_i) = n \cdot p_i (1-p_i) \quad \forall i = 1, \dots, k$

Para $m = 2$

$(X_1, X_2, n - X_1 - X_2) \sim Mult(n, p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)$

$$M_{(X_1,X_2)}(t_1, t_2) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + 1 - p_1 - p_2)^n$$

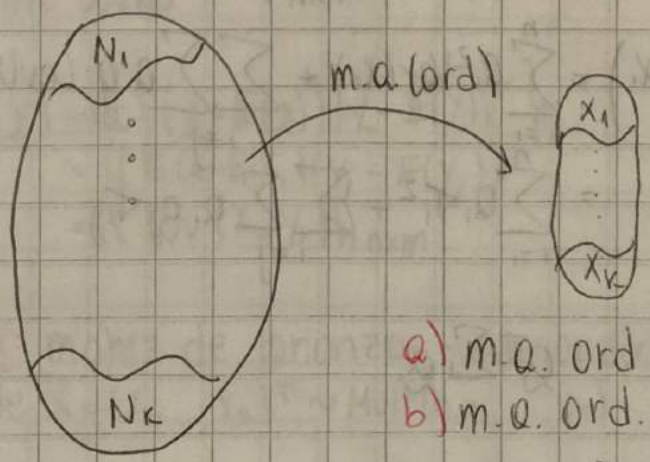
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 M_{X_1 X_2}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = n(n-1)(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + 1 - p_1 - p_2)^{n-2} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot e^{t_1} \cdot e^{t_2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1, X_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} M_{X_1 X_2}(t_1, t_2)\Big|_{t=0} = n(n-1) \cdot p_1 \cdot p_2$$

$$\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1, X_2) - \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$$
$$= n(n-1) \cdot p_1 p_2 - n^2 \cdot p_1 \cdot p_2$$
$$= n p_1 \cdot p_2 (n - 1 - n)$$
$$= -n \cdot p_1 p_2 < 0$$

En general,
$Cov(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j \quad \forall i \neq j$
$\Rightarrow$ existe asociación negativa entre cada par (X_i, X_j) $\forall i \neq j$.

Tarea: Investigar sobre distribución hipergeométrica multivariada.



X_i = N° de sujetos de tipo i en la m.a.

a) m.a. ord c/d $\rightarrow$ mult. $(n, p_1, \dots, p_k)$
b) m.a. ord. s/d $\rightarrow$ Hip$(n, N_1, \dots, N_k)$

$$p_i = \frac{N_i}{N}$$

2. Distribución normal multivariada

Def Sea $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vector aleatorio t.q.

$\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$

$Var(X_i) = \sigma_i^2$

$Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij} \quad \forall i \neq j$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\underset{\sim}{X}) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))^T$$
$$= (\mu_1, \dots, \mu_n)^T = \underset{\sim}{\mu} \in \mathbb{R}^n$$

vecto de medias o esperanza de $\underset{\sim}{X}$

$$V(\underset{\sim}{X})_{n \times n} = ((Cov(X_i, X_j)))_{i,j}$$
$$= [\sigma_{ij}]_{ij}$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \sigma_{2n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \dots & & \sigma_{nn} \end{pmatrix} = \Sigma$$

Σ → matriz de var-cov. de $\underset{\sim}{X}$

Note que $\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \ \forall i \Rightarrow V(\underset{\sim}{X})$ es simetrica.

Σ

Además, si $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \tilde{a}^T \underset{\sim}{X}$

$$\Rightarrow Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j \sigma_{ij}$$
$$= \underset{\sim}{a}^T \Sigma \underset{\sim}{a}$$

$$\therefore \operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}(a^T \Sigma a) = \operatorname{Var}(a^T X)$$
$$= a^T \operatorname{Var}(x) a$$
$$= a^T \Sigma a$$

Como $\forall$ v.a. Y
$$\operatorname{Var}(Y) \geq 0 \Rightarrow a^T \Sigma a \geq 0 \quad \forall a$$
$$\Rightarrow \Sigma \geq 0 \text{ (semi definido positivo).}$$

Para $\tilde{a} \neq 0$
$$\operatorname{Var}(Y) = a^T \Sigma a > 0 \leftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \neq cte$$
$$\leftrightarrow x_1, \ldots, x_n \text{ son v.a. l.i.}$$
$$\Rightarrow \Sigma > 0 \text{ (definido positivo).}$$

$$\operatorname{Var}(Y) = 0 \leftrightarrow a^T \Sigma a = 0$$
$$\leftrightarrow Y = \sum a_i x_i = cte.$$
$$\leftrightarrow x_1, \ldots, x_n \text{ son l.i.}$$
$$\leftrightarrow \Sigma \geq 0 \text{ (semi definido positivo).}$$

Note por definición que
$$V(\underset{\sim}{X}) = E\left((\underset{\sim}{X} - E(\underset{\sim}{X}))(\underset{\sim}{X} - E(\underset{\sim}{X}))^T\right)$$
$$= (E\{(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\})_{i,j}$$
$$= (\operatorname{Cov}(X_i, X_j))_{n \times n}.$$

Mas generalmente, la matriz de covarianzas entre 2 v.a. $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ y $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^T$ se define como

$$C(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) = E\{(\underset{\sim}{X} - E(\underset{\sim}{X}))(\underset{\sim}{Y} - E(\underset{\sim}{Y}))^T\}$$
$$= (E(X_i - E(X_i))(Y_j - E(Y_j)))$$
$$= (\operatorname{Cov}(X_i, Y_i)))_{n \times m}$$

Tarea: matriz de varianzas-covarianzas de $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_k)^T \sim Mult(n, p_1, \ldots, p_n)$

Prop Básicas

1) $\mathbb{E}(A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}) = A\mathbb{E}(\underset{\sim}{x}) + b$
$V(A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}) = A\,Var(\underset{\sim}{x})\,A^T$

2) $Cov(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \mathbb{E}(\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{y}^T) - \mathbb{E}(\underset{\sim}{x})(\mathbb{E}(\underset{\sim}{y}))^T$
$C(A\underset{\sim}{x}, B\underset{\sim}{y}) = A\,C(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})\,B^T$

Note que: $C(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{x}) = C(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})^T$
$C(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}) = Var(\underset{\sim}{x})$

3) $V(\underset{\sim}{x} \pm \underset{\sim}{y}) = V(\underset{\sim}{x}) + V(\underset{\sim}{y}) \pm C(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \pm C(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{x}) \pm (C(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{x}))^T$

4) $\underset{\sim}{x} \perp\!\!\!\perp \underset{\sim}{y} \Rightarrow C(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = 0$

Sea $\underset{\sim}{z} = (z_1, \dots, z_m)^T$, donde $z_1, \dots, z_m$ son i.i.d. $N(0,1)$

$\Rightarrow f_{\underset{\sim}{z}}(\underset{\sim}{z}) = f_{z_1, \dots, z_n}(z_1, \dots, z_n) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{m} f_{z_i}(z_i) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2}$

$= (2\pi)^{-m/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} z_i^2}$

$= (2\pi)^{-m/2} e^{-\frac{1}{2} z_i^T z_i}$

$Rec(\underset{\sim}{z}) = Rec(z_1) \times \dots \times Rec(z_m) = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$

Además $M_{\underset{\sim}{z}}(\underset{\sim}{t}) = M_{z_1, \dots, z_m}(t_1, \dots, t_m) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{m} M_{z_i}(t_i)$

$z_i \sim N(0,1)$ $= \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{1}{2}t_i^2} = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} t_i^2}$ $t_i \in \mathbb{R}$

$= e^{\frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{t}}$ $\underset{\sim}{t} \in \mathbb{R}^n$

Note que $\mathbb{E}(z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$Cov(z_i, z_j) \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\underset{\sim}{z}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ y $Cov(z_i, z_j) = Id_{m \times m}$

Transformación lineal

Martes 23/05/17.-

Sea $\underset{\sim}{X} = A\underset{\sim}{Z} + \mu$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow x_i = \underset{\sim}{a_i}^T \underset{\sim}{Z} + \mu_i$

$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} z_j) + \mu_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$ es la i-ésima coordenada de $\underset{\sim}{X}$.

$\Rightarrow$ • $\mathbb{E}(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{E}(A\underset{\sim}{Z} + \mu) = A \underbrace{\mathbb{E}(\underset{\sim}{Z})}_{0} + \mu = \mu$

$\therefore \boxed{\mathbb{E}(X_i) = \mu_i} \quad \forall i = 1, \ldots, m$

• $V(\underset{\sim}{X}) = V(A\underset{\sim}{Z} + \mu)$

$= A V(\underset{\sim}{Z}) A^T = AA^T = \Sigma_{n\times n} \geq 0$ (semidef. positiva)

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij}}$

• Además, $M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{m} t_i x_i}\right)$

$= \mathbb{E}\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{X}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\underset{\sim}{t}^T (A\underset{\sim}{Z} + \mu)}\right)$

$= \mathbb{E}\left(e^{\underset{\sim}{t}^T A \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{t}^T \mu}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \mu} \cdot e^{(A\underset{\sim}{t})^T \underset{\sim}{Z}}\right)$

$= e^{\underset{\sim}{t}^T \mu}\, \mathbb{E}\left(e^{(A^T \underset{\sim}{t})^T \underset{\sim}{Z}}\right)$

$= e^{\underset{\sim}{t}^T \mu} \cdot M_{\underset{\sim}{Z}}(A^T \underset{\sim}{t})$

pero $M_{\underset{\sim}{Z}}(\underset{\sim}{t}) = e^{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{t}}$

$= e^{\underset{\sim}{t}^T \mu} \cdot e^{\frac{1}{2}(A^T \underset{\sim}{t})^T (A^T \underset{\sim}{t})}$

$= e^{\underset{\sim}{t}^T \mu + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T A A^T \underset{\sim}{t}}$ $\quad (AA^T = \Sigma)$

$= e^{\underset{\sim}{t}^T \mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T \Sigma \underset{\sim}{t}}$

$= \exp\left\{\underset{\sim}{t}^T \mu + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T \Sigma \underset{\sim}{t}\right\}$

Resumiendo... $\quad \underset{\sim}{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m)^T$ con $Z_i \sim N(0,1)$

$\Rightarrow \underset{\sim}{X} = A_{n\times m}\underset{\sim}{Z} + \underset{m\times 1}{\mu} \qquad A A^T = \Sigma_{n\times n}$

$\Rightarrow M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left\{\underset{\sim}{t}^T \mu + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T \Sigma \underset{\sim}{t}\right\}$

• **Def** $\underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$

distribución multivariada (n-variada) con media de media $\underset{\sim}{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ y de cov-var $\Sigma((\sigma_{ij}))_{i=1,\dots,n}$.

$\Leftrightarrow M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left\{ \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2} t^T \cdot t \right\}$

$\Leftrightarrow$ ($\Sigma > 0$ definida positiva)

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \cdot |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

• Note que si $\underset{\sim}{\mu} = 0$, $\Sigma = Id_{n\times n}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, I_m)$

$\Leftrightarrow X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$.

$\Leftrightarrow \varphi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \mathbb{E}(e^{i t^T \underset{\sim}{X}})$

$= M_{\underset{\sim}{X}}(i\underset{\sim}{t}) = e^{i \cdot \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu} - \frac{1}{2} \underset{\sim}{t}^T \Sigma \underset{\sim}{t}}$

• **Prop. básicas:**

1. Sea $\underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \underset{\sim}{Y} = B\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b} \sim N_m(B\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{b}, B\Sigma B^T)$

Dem | Tarea. Usar f.g.m. //

~~En particular, si~~

En particular, si $\Sigma > 0$ y colocamos $B = \Sigma^{-1/2}$ y $\underset{\sim}{b} = -\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{Y} = \Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{X} - \Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu} = \underbrace{\Sigma^{-1/2}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})}_{\text{estandarización de } \underset{\sim}{X}} \sim N_m(\underset{\sim}{0}, Id)$

2. $\underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$
ssi $\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{X} \sim N_1(\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{a}^T \Sigma \underset{\sim}{a})$ $\forall \underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n$

Dem] $\Rightarrow$] Tarea (Tomar $A = \underset{\sim}{a}^T \in \mathcal{M}_{1\times n}$, $\underset{\sim}{b} = 0 \in \mathbb{R}^1$).
$\Leftarrow$] Usar Teorema de Cramér-Wold.
"La distribución de un v.a. $\underset{\sim}{X}$ queda completamente determinada por las distribuciones de los c.l $\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{X}$ $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n$"

3. $\underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, considerar la partición
$n_1 + n_2 = n$

$$\underset{\sim}{X}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \; n_1 \times 1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \; n_2 \times 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{\sim}{\mu} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{pmatrix}, \; \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{\mu}_i = \mathbb{E}(\underset{\sim}{X}_i)$, $\Sigma_{ii} = V(\underset{\sim}{X}_i)$, $\Sigma_{ij} = C(\underset{\sim}{X}_i, \underset{\sim}{X}_j)$

$\Rightarrow$ a. $\underset{\sim}{X}_i \sim N_{n_i}(\underset{\sim}{\mu}_i, \Sigma_{ii})$ $i = 1, 2$.

b. $\underset{\sim}{X}_1 \perp\!\!\!\perp \underset{\sim}{X}_2 \longleftrightarrow \Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T = 0$

En general, $A\underset{\sim}{X} \perp\!\!\!\perp B\underset{\sim}{Y} \leftrightarrow A\Sigma B^T = 0$

Dem]
a. es claro de 1)
$B = (I_n, 0)$
$\underset{\sim}{b} = 0$
$\Rightarrow \underset{\sim}{Y} = (I_n, 0)\begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{X}_1$ $\quad \cdot \underset{\sim}{\mu} = B\cdot\underset{\sim}{\mu} = [I_n \; 0]\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_1$

$\cdot B\Sigma B^T = [I_n, 0]\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$

1) $\Rightarrow \underset{\sim}{X}_1 \sim N_{n_1}(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11})$ //

b. Usar f.g.m.

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = M_{\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{t}_2)$$

$$= e^{\underset{\sim}{t}^T\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T\Sigma\underset{\sim}{t}}$$

$$= \exp\left\{ (\underset{\sim}{t}_1^T, \underset{\sim}{t}_2^T)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{t}_1^T, \underset{\sim}{t}_2^T)\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underset{\sim}{t}_1\\ \underset{\sim}{t}_2\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \exp\left\{ \underset{\sim}{t}_1^T\underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{t}_2^T\underset{\sim}{\mu}_2 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}_1^T\Sigma_{11}\underset{\sim}{t}_1 + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{t_1^T\Sigma_{12}t_2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \underline{\underline{t_2^T\Sigma_{21}t_1}}\right) + \frac{1}{2}t_2^T\Sigma_{22}t_2\right\}$$

(★)

$$= \exp\left\{\underset{\sim}{t}_1^T\mu_1 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}_1^T\Sigma_{11}\underset{\sim}{t}_1\right\}\cdot\exp\left\{t_2^T\mu_2 + \frac{1}{2}t_2^T\Sigma_{22}t_2\right\}\cdot\exp\{(+)\}$$

$$= M_{\underset{\sim}{X}_1}(\underset{\sim}{t}_1)\cdot M_{\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{t}_2) \iff \Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T = 0$$

4. $\underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, $\Sigma > 0$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})^T\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$$

Distribución de Funciones de Vectores aleatorios

Dado un v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ en un modelo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Considere la transformación

$$(X_1, \dots, X_n) \underset{\mathbb{R}^n}{\longrightarrow} (Y_1, \dots, Y_n)_{\mathbb{R}^n}$$

donde $Y_i = g_i(\underset{\sim}{X}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$
y $g_i = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$

Dada la distribución de $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ queremos la distribución de $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$

Note que: $\underset{\sim}{Y} = g(\underset{\sim}{X})$ donde $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\underset{\sim}{x} \longmapsto (g_1(\underset{\sim}{x}), \dots, g_n(\underset{\sim}{x}))$$

Sea $\underset{\sim}{h}(B) = \{\underset{\sim}{x} : g(\underset{\sim}{x}) \in B\} \quad B \subseteq \mathbb{R}^n$
$= g^{-1}(B)$

En general, se tiene que:

$$P_{\underset{\sim}{Y}}(B) = P_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{Y} \in B)$$
$$= \mathbb{P}(g(X) \in B)$$
$$= \mathbb{P}(X \in g^{-1}(B)) = P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{h}(B)) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (medible)}.$$

I $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ v.a. discretos

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) = \mathbb{P}(g_1(X_1) = y_1, \dots, g_n(X_n) = y_n)$$
$$= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in \{(x_1, \dots, x_n) \; g_i(x_1, \dots, x_n) = y_i \;\; i = 1, 2, \dots, n\}$$
$$= \sum_{\{(x_1, \dots, x_n) \; g_i(x_1, \dots, x_n) = y_i, \; i = 1, 2, \dots, n\}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

Nota: Conviene determinar

$$Rec(Y_1, \dots, Y_n) = \{(y_1, \dots, y_n) : g_i(x_1, \dots, x_n) = y_i \; \forall (x_1, \dots, x_n) \in Rec(x)\}$$
$$= \{(y_1, \dots, y_n) \; P_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) > 0\}$$

Jueves 29.05.17.-

Ejemplo

1. Sean $Y_1 = X_1 + X_2$
$Y_2 = X_1 - X_2$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_1 = y_1, X_2 = y_2) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = y_1,\ X_1 - X_2 = y_2)$$
$$= \mathbb{P}\left((X_1, X_2) \in \{(x_1, x_2) :\ x_1 + x_2 = y_1,\ x_1 - x_2 = y_2\}\right)$$
$$= \sum_{\{(x_1,x_2):\ x_1+x_2=y_1,\ x_1-x_2=y_2\}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

En este caso,
$$Rec((y_1, y_2)\ \ y_1 = x_1 + x_2 \ \text{ con } (x_1, x_2) \in Rec(x)\}$$
$$y_2 = x_1 - x_2$$

Por ejemplo, si

x_1	x_2	$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$	$\Rightarrow$	$y_1 = x_1 + x_2$	$y_2 = x_1 - x_2$	$\mathbb{P}(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$
0	2	1/4		2	-2	1/4
3	4	1/8		7	-1	1/8
1	6	1/8		7	-5	1/8
2	8	1/2		10	-6	1/2

2. (convolución discreta)
Sean X_1, X_2 v.a's discretas y se desea la distribución de $X_1 + X_2$
Paso 1: crear una ~~transformación~~ variable auxiliar
$\Rightarrow$ considerar la v. auxiliar
$(X_1, X_2) \longrightarrow (Y_1, Y_2)$
$Y_1 = X_1 + X_2$ → variable de interés
$Y_2 = X_2$ → " artificial.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_1=y_1, Y_2=y_2) = \mathbb{P}(X_1+X_2=y_1, X_2=y_2)$$
$$= \mathbb{P}(X_1=y_1-y_2, X_2=y_2)$$
$$\perp\!\!\!\perp \quad = \mathbb{P}(X_1=y_1-y_2)\,\mathbb{P}(X_2=y_2)$$

Paso 2: Marginalizar.

$$\mathbb{P}(Y_1=y_1) = \sum_{y_2} \mathbb{P}(Y_1=y_1, Y_2=y_2)$$
$$= \sum_{y_2} \mathbb{P}(X_1=y_1-y_2)\,\mathbb{P}(X_2=y_2)$$

Nota: Basta tomar sobre $(y_1,y_2)\,(y_2-y_2, y_2) \in Rec(X_1, X_2)$.

Aplicaciones:

1. X_1, X_2 v.a. independientes con $X_i \sim P(\lambda_i)$ $i=1,2$
Distribución de $Y = X_1 + X_2$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(y=y) = \sum_{\{k : k\geq 0,\, y-k\geq 0\}} \mathbb{P}(X_1=y-k)\,\mathbb{P}(X_2=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{y} \mathbb{P}(X_1=y-k)\,\mathbb{P}(X_2=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{y} \frac{\lambda_1^{y-k} e^{-\lambda_1}}{(y-k)!} \cdot \frac{\lambda_2^{k} e^{-\lambda_2}}{(k)!}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \sum_{k=0}^{y} \underbrace{\frac{y!}{(y-k)!(k)!}}_{\binom{y}{k}} \lambda_1^{y-k}\lambda_2^{k}$$

T. de Newton $= \begin{cases} \dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!}(\lambda_1+\lambda_2)^{y} & \text{si } y=0,1,\ldots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$\Rightarrow Y = X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1, \lambda_2)$

Tarea 1) Si $X_i \overset{ind}{\sim} P(\lambda_i)$ con $\lambda_i > 0$ $i = 1, \dots, n$

Muestre que (por inducción) que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$ Repita para f.g.m.

2) Repetir para a) $X_i \overset{ind}{\sim} Bin(n_i, p)$ $i = 1, 2$

b) $X_i \overset{ind}{\sim} Pascal(n_i, p)$ $i = 1, 2$.

3) Extender para $\sum_{i=1}^{n} X_i$

II. $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ continuos

Si $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ e $\underset{\sim}{Y} = g(\underset{\sim}{X})$ son v.a. continuos.

Hay dos casos para $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

a) Transformación 1-1

para cada $(x_1, \dots, x_n)$ existe un único $(y_1, \dots, y_n)$ t.q.:

$$x_i = h_i(y_1, \dots, y_n)$$

donde $(h_1, \dots, h_n)$ es la transformación inversa de $(g_1, \dots, g_n)$

Ejemplo

- $y_1 = x_1 + x_2 \rightarrow g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
  $y_2 = x_1 - x_2 \rightarrow g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

$$\leftrightarrow x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow h_1(y_1, y_2) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} \rightarrow h_2(y_1, y_2) = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

Sea $J = \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$

Prop:

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = |J| \cdot f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$$

$$\underset{\sim}{f_Y}(\underset{\sim}{y}) = \left|\frac{d\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{y})}{d\underset{\sim}{y}}\right| \cdot \underset{\sim}{f_X}(\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{y}))$$

Nota: Hay que delimitar $Rec(Y) = \{y : f_Y(y) > 0\}$
$= \{y : g(x) = y \ \forall x \in Rec(X)\}$

Dem)

Sea $\underset{\sim}{h}(B) = \underset{\sim}{g}^{-1}(B) = \{\underset{\sim}{x} : g(\underset{\sim}{x}) \in B\}$ $\quad B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow P_Y(B) = \mathbb{P}(\underset{\sim}{Y} \in B)$$
$$= \mathbb{P}(g(\underset{\sim}{x}) \in B)$$
$$= \mathbb{P}(X \in \underset{\sim}{h}^{-1}(B))$$
$$= \mathbb{P}_{\underset{\sim}{X}}(h(B))$$

$$\int_{\underset{\sim}{h}(B)} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})\,dx \qquad y = g(\underset{\sim}{x}) \Rightarrow x = h(y), \quad d\underset{\sim}{x} = |J|\,dy$$

$$= \int_B |J| \cdot f_{\underset{\sim}{X}}(h(y))\,dy \rightarrow$$ de acuerdo a la fórmula de cambio de variable para integrales múltiples.

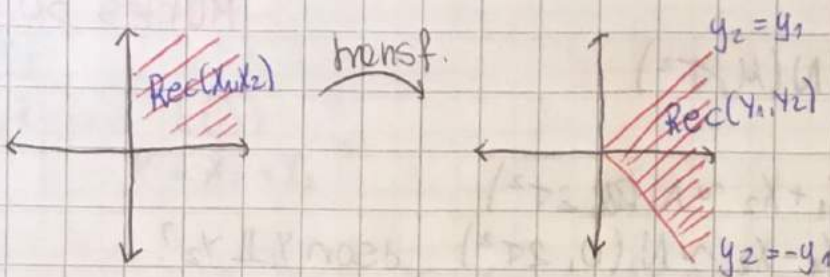
El resultado se obtiene al aplicar el sig. lema:

Lema: Sea Y un v.a. continuo de dimensión n

Si $\forall B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{P}_{\underset{\sim}{Y}}(B) = \mathbb{P}(Y \in B) = \int_B f(y)\,dy \quad \Rightarrow f(y) = F_Y(y)$$

f.d. de Y.



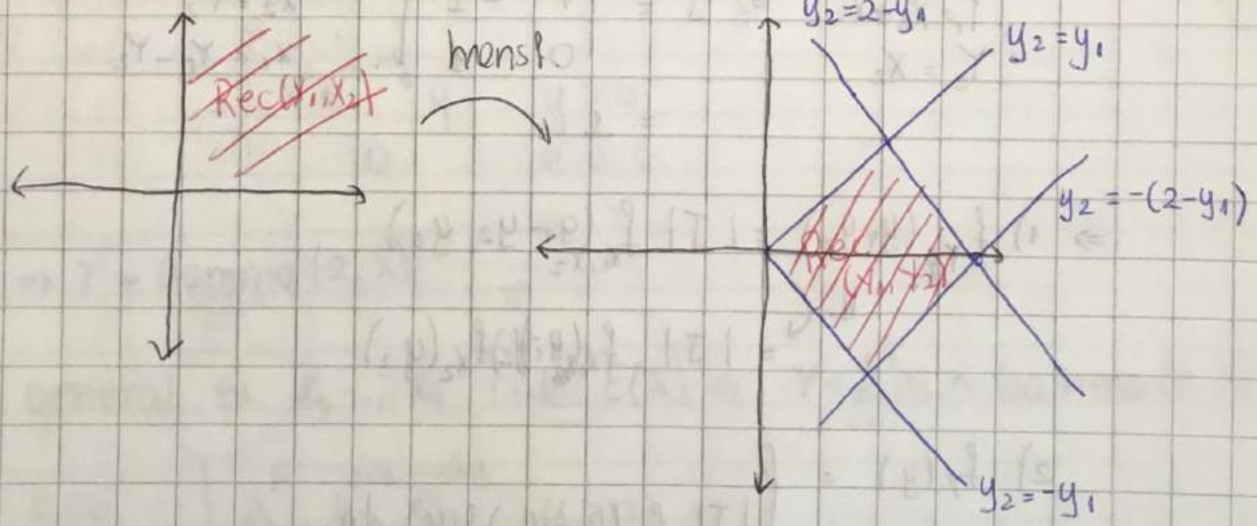
Tarea: Encontrar marginales y covarianza.

(2) $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} U(0,1)$

$$\Leftrightarrow f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x_1<1,\ 0<x_2<1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= X_1 - X_2 \end{aligned} \Rightarrow f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \begin{cases} 0 < \frac{y_1+y_2}{2} < 1 \\ 0 < \frac{y_1-y_2}{2} < 1 \end{cases} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/2 & \text{si } -y_1 < y_2 < 2-y_1,\ 0<y_1<1 \\ & \quad -(2-y_1) < y_2 < y_1,\ 1 \le y_1 < 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$



Martes 30/05 17.

(3) $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow Y_1 = X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$

$Y_2 = X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ ¿son $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$?

$$\text{Cov}(\underbrace{X_1 + X_2}_{Y_1}, \underbrace{X_1 - X_2}_{Y_2}) = \mathbb{E}(X_1^2 - X_2^2) - \mathbb{E}(X_1 + X_2)\mathbb{E}(X_1 - X_2)$$

$$= \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_2^2) - (\mu + \mu)\underbrace{(\mu - \mu)}_{0}$$

$$= \text{Var}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 - (\text{Var}(X_2) + \mathbb{E}(X_2)^2)$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \sigma^2 - \mu^2$$

$$= 0$$

$\Rightarrow Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$

Ejemplo (convolución, caso continuo)

Sean X_1, X_2 v.a.'s continuas e independientes

$f_Y(y)$?

$Y = X_1 + X_2$

Solución:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= X_2 \end{aligned} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} X_2 &= Y_2 \\ X_1 &= Y_1 - Y_2 \end{aligned}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ 1) $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = |J| \cdot f_{X_1, X_2}(y_1 - y_2, y_2)$

$\perp\!\!\!\perp$ (independencia)

$= |J| \, f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2)$

2) $f_Y(y) = \int_{y_2} |J| \, f_X(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2) \, dy_2$

Ejemplo

- X_1, X_2 i.i.d $E(\lambda)$

$Y = X_1 + X_2$?

Demostraremos que $Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$

$$\Leftrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} y^{2-1} e^{-\lambda y} & , y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Tarea Extender a n v.a. i.i.d. $E(\lambda)$.

Aplicando la convolución,

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \qquad f_{X_2}(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = y - z > 0 \Rightarrow y > z \\ z &= x_2 \qquad\quad x_2 = z > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda(y-z)} \lambda e^{-\lambda z} dz = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dy$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} \cdot y & y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$$

En general, si $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $E(\lambda) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$

$$\Leftrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} & , y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

(b) Transformación no-biunívoca

Suponga que, para cada $(y_1, \dots, y_n)$ tal que $(y_1, \dots, y_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ existen k inversos

$$x_{ij} = h_i(y_1, \dots, y_n) \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, k \\ i = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Sea $J_j = \left| \frac{d(x_j)}{dy} \right| = \begin{vmatrix} \frac{d(x_{1j})}{dy_1} & \cdots & \frac{d(x_{1j})}{dy_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d(x_{nj})}{dy_1} & \cdots & \frac{d(x_{nj})}{d(y_n)} \end{vmatrix}$

Jacobiano asociado a la j-ésima solución.

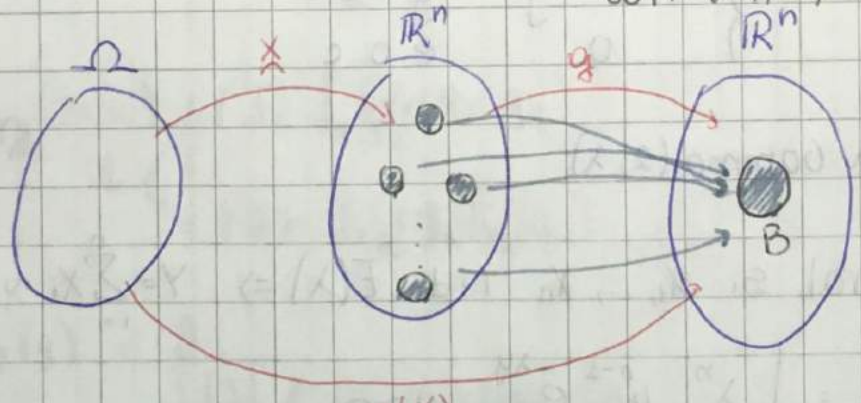
Prop

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^{k} |J_j| \, f_{X_1, \dots, X_n}\{h_{1j}(y_1, \dots, y_n), \dots, h_{nj}(y_1, \dots, y_n)\}$$

Nota Hay que determinar

$$\begin{aligned} Rec(Y_1, \dots, Y_n) &= \{(y_1, \dots, y_n) : f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) > 0\} \\ &= \{(y_1, \dots, y_n) : y_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \ \forall i = 1, \dots, n \\ &\qquad \text{con } (x_1, \dots, x_n) \in Rec(\underset{\sim}{X})\} \end{aligned}$$

Dem



$$\{Y \in B\} \leftrightarrow \{g(X) \in B\}$$
$$\leftrightarrow \{X \in \bigcup_{i=1}^{k} g_i^{-1}(B)\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y \in B) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X \in g_i^{-1}(B))$$

$$P(Y\in B) = \int_B f_Y(\underset{\sim}{y})\,d\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{n} \int_{g_i^{-1}(B)} f_X(\underset{\sim}{x})\,d\underset{\sim}{x} \qquad \begin{matrix} \underset{\sim}{y} = g(\underset{\sim}{x}) \\ \Rightarrow \underset{\sim}{x} = g_i^{-1}(\underset{\sim}{y}) \end{matrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_B f_{\underset{\sim}{x}}(g_i^{-1}(\underset{\sim}{y}))\,|J_i|\,d\underset{\sim}{y}$$

$$= \int_B \sum_{i=1}^{n} f_{\underset{\sim}{x}}(g_i^{-1}(\underset{\sim}{y}))\,|J_i|\,d\underset{\sim}{y}.$$

$$\Rightarrow f_Y(\underset{\sim}{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_{\underset{\sim}{x}}(g_i^{-1}(\underset{\sim}{y}))\,|J_i|\,d\underset{\sim}{y}. \quad //$$

Ejemplo

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow g(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \qquad g(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 2y_1 \\ x_1 - x_2 = \pm\sqrt{2y_2} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ hay 2 posibles soluciones

$$\begin{cases} x_{11} = \dfrac{2y_1 + \sqrt{2y_2}}{2} \rightarrow h_{11}(y_1, y_2) = \dfrac{2y_1 + \sqrt{2y_2}}{2} \\ x_{21} = \dfrac{2y_1 - \sqrt{2y_2}}{2} \rightarrow h_{21}(y_1, y_2) = \dfrac{2y_1 - \sqrt{2y_2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{21} = \dfrac{2y_1 - \sqrt{2y_2}}{2} \rightarrow h_{21}(y_1, y_2) = \dfrac{2y_1 - \sqrt{2y_2}}{2} \\ x_{22} = \dfrac{2y_1 + \sqrt{2y_2}}{2} \rightarrow h_{21}(y_1, y_2) = \dfrac{2y_1 + \sqrt{2y_2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{11}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{11}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_{21}}{\partial y_2} & \frac{\partial x_{22}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{2y_2}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{2y_2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{2y_2}}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{12}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{12}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_{22}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{22}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2\sqrt{2y_2}} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{2y_2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2y_2}}$$

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) = |J_1| f_{X_1X_2}(h_{11}(y_1,y_2), h_{21}(y_1,y_2)) + |J_2| f_{X_1X_2}(h_{12}(y_1,y_2), h_{22}(y_1,y_2))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y_2}} \left\{ f_{X_1,X_2}\left(\frac{2y_1+\sqrt{2y_2}}{2}, \frac{2y_1-\sqrt{2y_2}}{2}\right) + f_{X_1X_2}\left(\frac{2y_1-\sqrt{2y_2}}{2}, \frac{2y_1+\sqrt{2y_2}}{2}\right) \right\}$$

Aplicación:

(1) Sean $X_1, X_2 \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$

$$Y_1 = \frac{X_1+X_2}{2} \in \mathbb{R}$$

$$Y_2 = \frac{(X_1-X_2)^2}{2} \geq 0$$

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{\sqrt{2y_2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2y_1+\sqrt{2y_2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2y_1-\sqrt{2y_2}}{2}\right)^2 \right) \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2y_1-\sqrt{2y_2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2y_1+\sqrt{2y_2}}{2}\right)^2 \right) \right\} \right\}$$

$$y_1 \in \mathbb{R}, \; y_2 > 0$$

$$= \frac{2}{2\pi\sqrt{2y_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2y_1+\sqrt{2y_2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2y_1-\sqrt{2y_2}}{2}\right)^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2y_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{4y_1^2+2\sqrt{2y_2}+2y_2+4y_1^2-2\sqrt{2y_2}+2y_2}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2y_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(2y_1^2+y_2)\right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi y_2}} e^{-\frac{1}{2}y_2} & \text{si } (y_1,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}+ \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$= f_{Y_1}(y_1)\cdot f_{Y_2}(y_2) \qquad \forall (y_1,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

donde $f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{1}{2})}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}y_1^2} \Rightarrow Y_1 \sim N(0, 1/2)$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(y_2)}} e^{-\frac{1}{2}y_2} = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y_2}$$

$$\Rightarrow Y_2 \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2) = \chi_1^2$$

$\therefore X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} N(0,1)$

$$\Rightarrow Y_1 = \bar{X} \sim N(0, 1/2)$$

$$Y_2 = \frac{(X_1-X_2)^2}{2} = \frac{1}{2}\{(X_1-\bar{X})+(X_2-\bar{X})\}$$

$$= \sum_{i=1}^{2}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi_1^2$$ y son independientes.

Prop: $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

} $\perp\!\!\!\perp$

Aquí $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es la **media muestral**.

$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ es la **varianza muestral**.

Jueves 1.06.17.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

} $\perp\!\!\!\perp$

Tarea: $\mathbb{E}(S^2)$, $\mathrm{Var}(S^2)$

Dos ejemplos importantes:

1. Distribución t (de Student) con γ grados de libertad ($\gamma > 0$)

Sean $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim \chi^2_\nu$ } $\perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow$ la distribución de la v.a. definida por

$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2^2/\nu}}$$ se llama **t (de Student)** con γ grados de libertad.

Notación: $Y \sim t_\gamma = t(0,1,\nu)$

Tarea Muestre que

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Muestre que $E(Y) = \nu$, $\nu > 1$

$$Var(Y) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad \nu > 2$$

- $\boxed{\nu = 1} \Rightarrow Y \sim Cauchy(0,1)$

$$\hookrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Nota: $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$$= \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$$

está tabulada para distintos valores de ν y y.

Aplicaciones

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

- $\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
- $\frac{(n-1)S}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ y $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\,\frac{1}{(n-1)}}} = \boxed{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}}$$

Extensión: t-multivariada

$$\underset{\sim}{Z} \sim N_n(0, I_n)$$
$$V \sim \chi^2_\nu$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{Z} / \sqrt{V/\nu} \sim t_n(\underset{\sim}{0}, I_n, \nu)$$

Es la distribución ~~t-multip~~ t-multivariada con ν grados de libertad.

2. La distribución F de Fisher con (r, s) grados de libertad $(r, s > 0)$

Sean $X_1 \sim \chi^2_n$, $X_2 \sim \chi^2_s$ } $\perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow$ La distribución de la variable aleatoria

$$Y = \frac{X_1/n}{X_2/s}$$

se llama F de Fisher(n, s).

Notación: $Y \sim F_{n,s}$

Tarea: Muestre que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{n}{s}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} \left(1 + \frac{n}{s}y\right)^{-\frac{n+s}{2}} & y \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Tarea: Muestre que:
$Y^{-1} \sim F_{s,r}$ ✓✓

Nota: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ esta tabulada para diferentes valores de y y de (r,s).

Aplicaciones:

- $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2)$
  $Y_1, \dots, Y_m \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1} \\ \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} &= \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{m-1} \end{aligned}\right\} \perp\!\!\!\perp$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Rightarrow \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2/(n-1)}{\sum (x_i - \bar{y})^2/(m-1)} \sim F_{n-1, m-1}$$

3. Distribución Beta con parámetros (α_1, α_2) con $\alpha_i > 0$ $i = 1,2$

Sean

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\sim \text{Gamma}(\alpha_1, \lambda) \\ X_2 &\sim \text{Gamma}(\alpha_2, \lambda) \end{aligned}\right\} \perp\!\!\!\perp$$

$\Rightarrow$ La distribución de la v.a.

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

se llama **Beta con parámetros (α_1, α_2)**

¿Porque desaparece λ?

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda) \Rightarrow aX \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda/a) \quad \forall a > 0.$

Notación: $Y \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$

Tarea: Demuestre que:

$$f_Y(y) \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_1-1}(1-\alpha)^{y_2-1} & y \in (0,1) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Tarea: Muestre que $\dfrac{X_1}{X_1+X_2} \perp\!\!\!\perp X_1 + X_2$

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)\mathbb{E}(X_1+X_2) \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)}$$

$$= \frac{\alpha_1/\lambda}{\alpha_1/\lambda + \alpha_2/\lambda} = \boxed{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

En general, $X_i \overset{ind}{\sim} \text{Gamma}(\alpha_i, \lambda) \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Rightarrow \frac{X_1 + \ldots + X_m}{X_1 + \ldots + X_m + X_{m+1} + \ldots + X_n} \sim \text{Beta}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m,\ \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_n)$$

Estadísticos de Orden:

Para n v.a.'s $X_1, \dots, X_n$ defina:

$X_{(k)}$ = k-ésimo menor entre $X_1, \dots, X_n$

$\Rightarrow X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$

El vector $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ se llama **estadístico de orden**

Los ordenes extremos son:

$X_{(1)}$ = mínimo entre $X_1, \dots, X_n$

$X_{(n)}$ = máximo entre $X_1, \dots, X_n$.

Nota Hay n! maneras de ordenes los n valores $X_1, \dots, X_n$.

Estudiaremos a continuación el caso en que $X_1, \dots, X_n$ son i.i.d. con f.d.a F y (f.d f) en el caso continuo.

Prop Sean

$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

$X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$\Rightarrow$ a. $F_{X_{(1)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x)$

$= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x)$

$= 1 - \mathbb{P}_n(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$

X_i ind $= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x)$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))$

Si $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$

~~X~~ Si F es continua

$$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x) = \frac{dF_{X_{(1)}}(x)}{dx} = n(1-F(x))^{n-1} f_x(x)$$

b. $F_{X_{(n)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x)$

$= \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x)$

$= \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x)$

ind $= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x)$

$= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$

i.i.d $= (F_X(x))^n$

Si F es continua

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{\partial (F_{X_{(n)}}(x))}{\partial x} = \frac{\partial ((F_X(x))^n)}{\partial x} = n \cdot (F_X(x))^{n-1} \cdot f_x(x).$$

Martes 06.06.17.-

Resumiendo, si $X_1, \dots X_n$ v.a's i.i.d con F.D F y f.d. $f = F'$

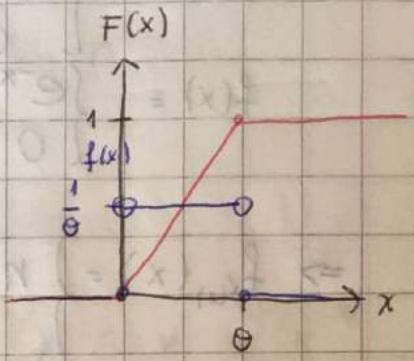
$\Rightarrow$ • $f_{X_{(1)}}(x) = n \cdot (1 - F(x))^n \cdot f_x(x)$

• $f_{X_{(n)}}(x) = n \ (F(x))^{n-1} \cdot f_x(x).$

Ejemplos

1. $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $U(0,\theta)$ $\theta > 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \le x < \theta \\ 1 & \text{si } \theta \ge 1 \end{cases}$$



$$f(x) \begin{cases} 1/\theta & \text{si } 0 \le x < \theta \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

luego

- $f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

- $f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Tarea:

1) $\mathbb{E}(X_{(j)})$ y $\mathrm{Var}(X_{(j)})$ para $j = 1, n$.
2) Sea $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ el **rango** de la muestra
   $M_n = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ el **pto. medio** de la muestra

¿ $\mathbb{E}(R_n)$ y $\mathbb{E}(M_n)$?

Obs: No puedo calcular $\mathrm{Var}(R_n)$ o $\mathrm{Var}(M_n)$ pues no sé $\mathrm{Cov}(X_{(1)}, X_{(n)})$ y para ello necesito $f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y)$ la f. d. conjunta.

(2) $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} E(\lambda)$. $\lambda = 1$

$\Leftrightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} n \cdot e^{-nx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} n \cdot (1 - e^{-x})^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Note que $X_{(1)} \sim E(n) \Rightarrow \mathbb{E}(X_{(1)}) = \frac{1}{n}$

$\mathrm{Var}(X_{(1)}) = \frac{1}{n^2}$

Tarea: $\mathbb{E}(X_{(n)})$, $\mathrm{Var}(X_{(n)})$, $\mathbb{E}(R_n)$, $\mathbb{E}(M_n)$.

Prop: ~~Para $k = 1, \ldots, n$~~ Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a's i.i.d F.
Entonces, para $k = 1, \ldots, n$ se tiene que:

$$F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F_X(x)^i (1 - F(x))^{n-i}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} \int_0^{F(x)} y^{k-1} (1-y)^{n-k} \, dy.$$

ya que $\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} z^i (1-z)^{n-i} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} \int_0^z y^{k-1} (1-y)^{n-k} \, dy.$

Note que

$F_{X_{(k)}}(x) = F_Z(F(x))$ donde $Z \sim \mathrm{Beta}(k, n+1-k)$.

En particular, si

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d $U(0,1)$

$\Rightarrow X_{(k)} \sim \text{Beta}(k, n+1-k) \quad k = 1, \dots, n$

Dem)

Defina $Z(x) = \#N^\circ \text{ de } X_j \leq x$.

$Z(x) = i \leftrightarrow$ "exactamente i de los X_j son $\leq x$"

Ahora, use que

$$\{X_{(k)} \leq x\} \Leftrightarrow \{Z(x) \geq k\} = \bigcup_{i=k} \{Z(x) = i\}$$

$$\Rightarrow P(X_{(k)} \leq x) = \mathbb{P}(Z(x) \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}(Z(x) = i)$$

Pero $Z(x) \sim \text{Bin}(n, F(x))$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Z(x) = i) = \binom{n}{i} F(x)^i (1-F(x))^{n-i}$$

$$\therefore \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F(x)^i (1-F(x))^{n-i}$$

Ver Gut, pg. 105.

Si F es continua, e.d. si $X_1, \dots, X_n$ son v.a. i.i.d F

$$\Rightarrow f_{X_{(k)}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \cdot f(x).$$

Note que

$f_{X_{(k)}}(x) = f_Z(F(x)) \cdot f(x)$ donde $Z \sim \text{Beta}(k, n+1-k)$.

Hasta aquí

Prop Sean $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ v.a.'s i.i.d. F. Entonces

$$F_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x,y) = F_{X_{(n)}}(y) - \mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y)$$

$$= \begin{cases} F(y)^n - (F(y) - F(x))^n & \text{si } x < y \\ F(y)^n & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

Si F es continua.

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = \begin{cases} n(n-1)(F(y)-F(x))^{n-2} f(y) f(x) & , \text{si } x<y \\ 0 & , \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

Dem/ Para cualquier par de v.a's se tiene que

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) + \mathbb{P}(X > x, Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{X,Y}(x,y) + \mathbb{P}(X>x, Y \leq y) = F_Y(y)}$$

$$\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y) - \mathbb{P}(X>x, Y \leq y)$$

Sean $X = X_{(1)}$, $Y = X_{(n)}$

$$F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = F_{X_{(n)}}(y) - \mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y)$$

donde $F_{X_{(n)}}(y) = (F(y))^n$

~~$\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = 1 - F_{X_{(1)}}(x)$~~

y $\mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y) = \mathbb{P}(x < X_i \leq y) \quad i = 1, \dots, n$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{x < X_i \leq y\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x \leq X_i \leq y) = \begin{cases} (F(y)-F(x))^n & \text{si } x<y \\ 0 & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

de donde se cumple el resultado.

Con este resultado, podemos estudiar la distribución de $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$

$$M_n = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

Tarea:

1. Para el caso continuo, muestre que

$$f_{R_n}(x) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} [F(y+x)-F(y)]^{n-2} f(x+y) f(y)\, dy$$

si: $x>0$.

2. Derive la distribución de $R_{(n)}$ si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $U(0,1)$

3. Sean $Y_1 = X_{(1)}$

$$Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)} \quad i = 2, \ldots, n$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $E(1)$, determine la dist. conjunta de de $Y_1, \ldots, Y_n$ ¿son independientes?

4. Para $n=2$, con X_1, X_2 i.i.d. geom( ), muestre que $X_{(2)} - X_{(1)}$ y $X_{(1)}$ son v.a. independientes. Comprueba la misma situación con el modelo $E(1)$.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a's i.i.d con f.d f continuas. Mostrar que:

$$f_{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i) & \text{si } y_1 < y_2 < \ldots < y_n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Más general,

$$(X_1, \ldots, X_n) \overset{d}{=} (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$$

$$\Rightarrow f_{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} n!\, f_{X_1, \ldots, X_n}(y_1, \ldots, y_n), & y_1 < y_2 < \ldots < y_n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Jueves 8.08.17.-

Distribuciones condicionales:

Dada una v.a. (X, Y) en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
Queremos conocer la distribución de Y dado que sabemos $X = x$, es decir.
$\mathbb{P}(Y \in B \mid X = x) \quad \forall B \in \mathcal{B}, \; x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo Se lanza un dado simétrico 2 veces y se observa

X_i = ptje. obtenido en el iésimo lanzamiento.
$i = 1, 2$.

Sean $X = X_1 + X_2$
$Y = \min\{X_1, X_2\}$

Note que X, Y son v.a. discretos.

Sean $A = \{Y = 2\}$
$B = \{X = 7\}$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{Y=2\} \cap \{X=7\}) = \mathbb{P}(X=7, Y=2) = \frac{2}{36}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X=7) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=2 \mid X=7) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{1/6} = \frac{1}{3} //$$

En general, si (X, Y) es un v.a. discreto
$\mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \dfrac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$ si $\mathbb{P}(X=x) > 0$.

Sea $P_{Y \mid X=x}(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} & \text{si } P_X(x) > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Veamos que es función de probabilidad:

i) $0 \leq P_{Y|X=x}(y) \leq 1 \quad \forall y, \forall x$

ii) $\sum_y P_{Y|X=x}(y) = \sum_y \frac{\mathbb{P}_{XY}(x,y)}{\mathbb{P}_X(x)} = \frac{1}{P_X(x)} \cdot \sum_y P_{XY}(x,y) = \frac{P_X(x)}{P_X(x)} = 1.$ $\forall x.$

iii) $\therefore$ lo es.

Def: Sea (X,Y) vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Si (X,Y) es discreto, la función definida por

$$P_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \begin{cases} \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} & \text{si } P_X(x) > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

se llama función de probabilidad condicional de Y dado $X=x$.

b) Si (X,Y) es continuo, la función definida por:

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} & f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

se llama función de densidad condicional dado $X=x$.

Nota: la definición de $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y})$ donde
$\underset{\sim}{X}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\underset{\sim}{Y}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es análoga.

Prop: De a) y b) se sigue que la distribución ~~de~~ condicional de Y dado $X=x$ está dada por:

$$\mathbb{P}(Y \in B \mid X = x) \begin{cases} \sum_{y \in B} p_{Y|X=x}(y) & \text{c.d.} \\ \int_{y \in B} f_{Y|X=x}(y) & \text{c.c.} \end{cases} \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

En particular, la **F.D. condicional** de Y dado $X=x$ está dada por:

$$F_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y \leq y \mid X = x) \begin{cases} \sum_{t \leq y} p_{Y|X=x}(t) & \text{en c.d.} \\ \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X=x}(t)\, dt & \text{en c.c.} \end{cases}$$

$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo
- Lanzar un dado 2 veces:
  X_1 = N° en 1° lanz.
  X_2 N° en 2° lanz.
  $Y = X_1 + X_2 \rightarrow Rec = \{2, 3, \ldots, 12\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y \text{ impar} \mid X_1 = 2) = \mathbb{P}(Y=3 \mid X_1=2) + \mathbb{P}(Y=5 \mid X_1=2) + \mathbb{P}(Y=7 \mid X_1=2) + \mathbb{P}(Y=9 \mid X_1=2) + \mathbb{P}(Y=11 \mid X_1=2)$$

$X_2 = 7$ ~~$X_2 = 9$~~

$$= \mathbb{P}(Y=3 \mid X_1=2) + \mathbb{P}(Y=5 \mid X_1=2) + \mathbb{P}(Y=7 \mid X_1=2)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y=3, X_1=2) + \mathbb{P}(Y=5, X_1=2) + \mathbb{P}(Y=7, X_1=2)}{\mathbb{P}(X_1=2)}$$

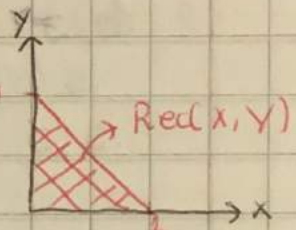
$$= \frac{3/36}{1/6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo (Tarea)

$X_i \overset{ind}{\sim} P(\lambda_i) \quad i=1,\dots,k$

$$(X_1,\dots,X_k) \Big| \sum_{i=1}^{k} X_i = x \sim \text{Mult}(x, p_1,\dots,p_k)$$

donde $p_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \quad i=1,\dots,k.$



Ejemplo

$$(X,Y) \sim f_{XY}(x,y) \begin{cases} 2 & \text{si } x>0, y>0, x+y<1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x) & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{Y|X=x}(y) \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } 0<y<1-x \ (0<x<1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\Rightarrow Y|X=x \sim U(0, 1-x)$ donde

$$X \sim f_X(x) \begin{cases} 2-2x & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Análogamente $f_{X|Y=y} \sim U(0,1-y) \quad \forall y \in (0,1)$.

Prop básicas:

1. a. $P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_{Y|X=x}(y) \quad \forall (x,y)$
$\left(= P_{X|Y=y}(x) \cdot P_Y(y)\right)$

b. $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x) = f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x,y)$

Ejemplo Sea $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$
$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
$Y|X=x \sim \text{Bin}(x,p)$

$$\Rightarrow P(Y=y) = \sum_x P_{Y|X=x}(y) P_X(x)$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} \binom{x}{y} p^x (1-p)^{x-y} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

2. a. $X \perp\!\!\!\perp Y$
$\Leftrightarrow P_{Y|X=x}(y) = P_Y(y) \quad \forall x \, \forall y$
$\Leftrightarrow P_{X|Y=y}(x) = P_X(x) \quad \forall x \, \forall y.$

b. X, Y v.a. continuas independientes
$\Leftrightarrow f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y) \quad \forall y \, \forall x$
$\Leftrightarrow f_{X|Y=y}(x) = f_X(x) \quad \forall x \, \forall y.$

3. Para todo $y \in \mathbb{R}$ (hijo)
se tiene que:
a. $P_{Y|X=x}(y) = g(x)$ en c.d.
b. $f_{Y|X=x}(y) = g(x)$ en c.c.

Ejemplo

(a) $Y|X=x \sim Bin(x,p)$

$\Rightarrow P_{Y|X=x}(y) = \binom{x}{y} p^y (1-y)^{x-y} = g(x)$ para cada $y = 0, 1, \dots, x$.

(b) $Y|X=x \sim U(0, 1-x) \Rightarrow f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{1-x} = g(x)$ $\forall y \in (0, 1-x)$

Prop:

Sea $g(x) = \begin{cases} P_{Y|X}(y) & \text{c.d.} \\ f_{Y|X}(y) & \text{c.c.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(g(x)) = \begin{cases} \mathbb{E}\{P_{Y|X}(y)\} = P_Y(y) & \text{c.d.} \\ \mathbb{E}\{f_{Y|X}(y)\} = f_Y(y) & \text{c.c.} \end{cases}$

Dem] considerar caso continuo

$$\mathbb{E}(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = f_Y(y).$$

Sigue que $\mathbb{E}\{(P(Y \in B | X)\} = P(Y \in B)$ $\forall B \in \mathcal{B}$.

Def: Dado un v.a. (X,Y) la esperanza condicional de Y dado $X=x$ es

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \begin{cases} \sum_y y \cdot P_{Y|X=x}(y) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X=x}(y)\, dy & \text{c.c.} \end{cases}$$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(g(Y)|X=x) = \begin{cases} \sum_{y} g(y)\, P_{Y|X=x}(y) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f_{Y|X=x}(y)\, dy & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ejemplo

1. $Y|X=x \sim Bin(x,p)$.

$\mathbb{E}(Y|X=x) = xp$

2. $Y|X=x \sim \mathcal{U}(0, 1-x)$

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_0^{1-x} \frac{y}{1-x}\, dx = \frac{1-x}{2} //$$

Se sigue que: Martes 15.06.17.-

$\mathbb{E}(Y|X=x) = h(x)$ (no aleatorio)

Sea $h(X) = \mathbb{E}(Y|X)$

Prop: Si $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, entonces

$\mathbb{E}\{\mathbb{E}(Y|X)\} = \mathbb{E}(Y)$

Dem) Caso continuo

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Y|X=x) \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot P_{Y|X=x}(y)\, dy\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \underbrace{f_{Y|X=x_1}(y)\, f_X(x)}_{f_{XY}(x,y)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx}_{f_Y(y)}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy = \mathbb{E}(Y) \quad //.$$

Por ejemplo

1. $Y|X=x \sim Bin(x, p)$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Y|X=x) = xp$

$\mathbb{E}(Y|X) = Xp \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X)\, p = \mathbb{E}(Y).$

Si $X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = p\lambda$

$X \sim U\{1, \dots, N\} \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \frac{N+1}{2} \cdot p$ ooo.

$X \sim Geom(p') \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \frac{1-p'}{p'} \cdot p$

Tarea Obtenga distribución marginal de Y en cada caso.

2. $Y|X=x \sim U(0, 1-x)$

$\mathbb{E}(Y|X=x) = \frac{1-x}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(Y|X) = \frac{1-X}{2}$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(\frac{1-X}{2}\right) = \frac{1-\mathbb{E}(X)}{2}$

- Si $X \sim f_X(x) \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x - 2x^2\, dx = 1/3 \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \frac{1-1/3}{2} = \frac{1}{3}$ //

Otras propiedades:

1. $\mathbb{E}(c|X=x) = c$ $\quad c$ cte.
2. $\mathbb{E}(Y_1+Y_2|X=x) = \mathbb{E}(Y_1|X=x) + \mathbb{E}(Y_2|X=x)$
3. $\mathbb{E}(cY|X=x) = c\cdot\mathbb{E}(Y|X=x)$

   2.-3. $\Rightarrow \mathbb{E}(a+bY|X=x) = a + b\,\mathbb{E}(Y|X=x)$

4. $\mathbb{E}\{g(X,Y)|X=x\} = \mathbb{E}(g(x,Y)|X=x)$

   En particular,

   $$\mathbb{E}(g_1(X)g_2(Y)|X=x) = \mathbb{E}(g_1(x)g_2(x)|X=x)$$
   $$= g_1(x)\,\mathbb{E}(g_2(x)|X=x).$$

   Además,

   $$\mathbb{E}\{g_1(X)g_2(Y)\} = \mathbb{E}(g_1(x))\cdot\mathbb{E}(g_2(Y)|X=x)$$

   Por ejemplo, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X\,\mathbb{E}(Y|X))$

5. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}(g(Y)|X=x) = \mathbb{E}(g(Y))$

   Ejemplo

   i) $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$

   $$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad Z = \sum_{i=2}^{n} X_i$$

   $$\Rightarrow \mathbb{E}\left(X_1 \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i = t\right) = \frac{t}{n}$$

   ii) Idem si $X_i \overset{iid}{\sim} E(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}\left(X_1 \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \overline{X}$

   iii) $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)^T$

   $$\underset{\sim}{X} \sim N_n(0, I_n)$$

   $$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & n\end{pmatrix}\right)$$

   $$\Rightarrow X_1 \Big| \sum_{i=1}^{n} X_i = t \sim N\left(\frac{t}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$$

Dem)

2) $f_{X_1|T=t}(x) = \dfrac{f_{T|X_1=x_1}(t) \cdot f_{X_1}(x_1)}{f_T(t)}$

$T = X_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} X_i}_{Z \sim \text{Gamma}(n-1, \lambda)}$

$T|X_1=x_1 \Rightarrow T = x_1 + Z$

$\Rightarrow f_{T|X_1=x_1}(t) = f_Z(t-x_1)$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} (t-x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t-x_1)} & t-x_1 > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{X_1|T=t}(x_1) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} (t-x_1)^{n-2} \cdot e^{-\lambda(t-x_1)} \cdot \lambda e^{-\lambda x_1} \Big/ \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^n e^{-\lambda t} & t > x_1 > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} \dfrac{(t-x_1)^{n-2}}{t^{(n-2)+2}} & 0 < x_1 < t \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X_1|T=t) = \int_0^t x_1 (n-1) \frac{(t-x_1)^{n-2}}{t^n} dx_1$$

$$= \frac{(n-1)}{t^n} \int_0^t x_1 (t-x_1)^{n-2} dx_1 \qquad u = x_1/t, \quad du = \frac{1}{t} dx_1$$

$$= \frac{n-1}{t^n} \int_0^1 ut (t-ut)^{n-2} t \, du$$

$$= \frac{n-1}{t^n} \int_0^1 u \cdot t^n (1-u)^{n-2} du = \frac{t}{n}$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{Beta}(2, n-1)}$

- **Def:** La **varianza condicional** de Y dado $X = x$ se define como

$$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y|X=x))^2 \,|\, X = x \right]$$

$$= \begin{cases} \sum_y (y - \mathbb{E}(Y|X=x))^2 \, P_{Y|X=x}(y) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_{Y|X=x} \, f_{Y|X=x}(y)\, dy & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ejemplo

1. Si $Y|X=x \sim \mathrm{Bin}(x,p)$

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = xp = \mu_{Y|X}$$

$$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \sum_{y=0}^{x} (y - xp)^2 \underbrace{\binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}}_{P_{Y|X=x}}$$

$$= x \cdot p \cdot (1-p).$$

2. $Y|X=x \sim \mathrm{Unif}(0, 1-x)$

$$= \mathbb{E}(Y|X=x) = \frac{1-x}{2}$$

$$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \int_0^{1-x} \left(y - \frac{1-x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-x} \, dy$$

$$= \frac{(1-x)^2}{12}$$

Es claro que

$\mathrm{Var}(Y|X=x) = v(x) \rightarrow$ no aleatorio.

$\mathrm{Var}(Y|X) = v(X) \rightarrow$ v.a.

Prop: Sean X e Y v.a's y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q.
$\mathbb{E}((Y-g(x))^2) < \infty$.

$\Rightarrow \mathbb{E}((Y-g(x))^2) = \mathbb{E}(Var(Y|X)) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(Y|X) - g(x))^2)$ (*)

Dem|

$$\mathbb{E}((Y-g(x))^2) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X) + \mathbb{E}(Y|X) - g(x))^2)$$
$$= \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y|X))^2) + 2\mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y|X))(\mathbb{E}(Y|X)-g(x)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)-g(x))^2).$$

Como $\mathbb{E}(\delta(XY)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\delta(XY)|X))$

$\Rightarrow \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y|X))^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y|X))^2|X))$
$= \mathbb{E}(Var(Y|X))$

basta ver que $\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}(Y|X))(\mathbb{E}(Y|X)-g(x))] = 0$

(*)

(*) $= \mathbb{E}(\mathbb{E}\{(Y-\mathbb{E}(Y|X))(\mathbb{E}(Y|X)-g(x))|X\})$
$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)-g(x))(\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}(Y|X)|X))$
$- \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)|X))(\mathbb{E}(Y|X)-g(x)) = \mathbb{E}(0) = 0.$

($\mathbb{E}(Y|X)$ − $\mathbb{E}(Y|X)$ = 0)

Tomando $g(x) = \mathbb{E}(Y)$

$\Rightarrow \mathbb{E}((\mathbb{E}(Y|X) - g(x))^2)$
$= \mathbb{E}((\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(Y))^2] = Var(\mathbb{E}(Y|X))$
$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$

~~Resum~~

Corolario Suponga $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$

$\Rightarrow Var(Y) = \mathbb{E}(Var(Y|X)) + Var(\mathbb{E}(Y|X))$

Dem| tomar $g(x) = \mathbb{E}(Y)$.

Resumiendo,

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$

$Var(Y) = \mathbb{E}(Var(Y|X)) + Var(\mathbb{E}(Y|X))$.

Ejemplos

1. $Y|X=x \sim Bin(x,p)$

$\mathbb{E}(Y|X) = pX \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = p\mathbb{E}(X)$

$Var(Y|X) = Xp(1-p)$ $\quad Var(Y) = \mathbb{E}(Xp(1-p)) + Var(pX)$

$= p(1-p)\mathbb{E}(X) + pVar(X).$

2. $Y|X=x \sim P(\lambda)$ $\lambda > 0$.

$\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$

$Var(Y) = \lambda p(1-p) + p^2\lambda = \lambda p.$

Jueves 15.06.17

** $g(x) = \mathbb{E}(Y|X)$

$\Rightarrow \mathbb{E}\{(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2\} = \mathbb{E}(Var(Y|X))$

$\leq \mathbb{E}\{(Y - g(Y|X))$

$Vg(X) \neq \mathbb{E}(Y|X)$

$\Rightarrow g(X) = \mathbb{E}(Y|X) = \min_g \mathbb{E}\{(Y-g(X))^2\}$

Nota $g(x) = \mathbb{E}(Y|X=x)$ se llama función de regresión de Y en $X=x$.

Ejemplo

$(X,Y) \sim N_2((\mu_x, \mu_y), (\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_{xy}))$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Y|X=x)$ es constante en X (Tarea)

En general,

$$\begin{pmatrix} Y \\ \underset{\sim}{X} \end{pmatrix} \sim N_{1+k}\left(\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \underset{\sim}{\mu_X} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & \underset{\sim}{\Sigma_{yx}} \\ \underset{\sim}{\Sigma_{xy}} & \underset{\sim}{\Sigma_{xx}} \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow Y|\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x} \sim N_1\left(\mu_Y + \underset{\sim}{\Sigma_{yx}}\underset{\sim}{\Sigma_{xx}}^{-1} \cdot (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu_x})\right)$$

$$\mathbb{E}(Y|\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \mu_Y + \underset{\sim}{\Sigma_{yx}}\underset{\sim}{\Sigma_{xx}}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})$$

$$Var(Y|\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \sigma_Y^2 - \underset{\sim}{\Sigma_{yx}}\underset{\sim}{\Sigma_{xx}}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma_{xy}}.$$

Secuencia de v.a's y modos de convergencia

*Objetivo: Dada secuencia de v.a's $\{Z_n : n \geq 1\}$, queremos estudiar el comportamiento (su distribución) asintótico de Z_n cuando $n \to \infty$.

Ejemplo

$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde $X_1, \ldots, X_n$ v.a's i.id. $Ber(p)$

$\Rightarrow Z_n \sim Bin(n,p)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

¿Pero cómo distribuye si $n \to \infty$?

$\Rightarrow \{Z_n : n \geq 1\}$ es sec. de v.a. t.q. $Z_n \sim Bin(n,p)$

Podemos demostrar que:

I) $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

II) $\forall t \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) \longrightarrow \Phi(t) = \int_0^t \phi(x)\,dx$$

$\phi(x)$: f.d. de $N(0,1)$.

El primer resultado significa que "para n suficientemente grande", la probabilidad de que $\bar{X}_n = \frac{Z_n}{n}$ difiera de $p = \mathbb{E}(X_i)$ en una cant. arbitrariamente pequeña es despreciable".

El segundo resultado significa que para "n suficientemente grande" la distribución de $\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(Z_n - np)}{\sqrt{p(1-p)}}$ es aproximadamente $N(0,1)$.

La dem de I. se basa en el sig Lema:

Lema (Desigualdad de Chebyshev)
Sea X v.a. con 2° momento finito y c cte. arbitraria:
$\forall \varepsilon > 0$ se tiene

$$\mathbb{P}(|X-c| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}((X-c)^2)}{\varepsilon^2}$$

En particular, si $\sigma^2 = Var(X)$ y $c = \mu = \mathbb{E}(X)$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$Z_n \sim Bin(n,p)$

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p \quad y \quad Var\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

II) es consecuencia de T.L.C (o TCL).

I) Convergencias en Probabilidad
Sea $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ sec. de v.a's de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\theta \in \mathbb{R}$ cte.
Def: Diremos que Z_n **converge en probabilidad** para θ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Notación

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

$$plim Z_n = \theta$$

Note que $Z_n \xrightarrow{P} \theta \leftrightarrow (Z_n - \theta) \xrightarrow{P} 0$

Def: Diremos que Z_n converge en probabilidad a una v.a. Z (definida en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) ssi

$\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\iff (Z_n - Z) \xrightarrow{P} 0$

Note que si $Z_n = \theta_n$ (cte. no aleatoria) $\forall n \geq 1$

y $\theta_n \longrightarrow \theta$, $n \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow \theta_n \xrightarrow{P} \theta$

Ejemplo

1) Sea $Z_n \sim Bin(n, p)$, $n \geq 1$

Vimos que

$\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} p$

2) Supongo que

$P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$

$P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$.

$\Rightarrow Z_n \longrightarrow \theta$

Dem $\mathbb{P}(Z_n = z)$ $\begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{si } z = \theta \\ \frac{1}{n} & \text{si } z = \theta + n^2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon)$

$= \mathbb{P}(Z_n = \theta)$

$= 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

3) $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ cuando $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$, $\theta > 0$

$\Rightarrow Z_n \xrightarrow{P} \theta$

Dem $F_{Z_n}(z) = F_{X_{(n)}}(z) = (F_X(z))^n$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \left(\frac{z}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \le z < \theta \\ 1 & \text{si } z \ge \theta \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Z_n - \theta| < \varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon \le Z_n - \theta < \varepsilon)$$
$$= \mathbb{P}(\theta - \varepsilon \le Z_n \le \varepsilon + \theta)$$
$$= F_{Z_n}(\theta + \varepsilon) - F_{Z_n}(\theta - \varepsilon)$$
$$= 1 - F_{Z_n}(\theta - \varepsilon) \quad \text{pues } \varepsilon + \theta \ge \theta \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow F_{Z_n}(\theta - \varepsilon) \begin{cases} 0 & \text{si } \theta - \varepsilon < 0 \iff \varepsilon > \theta \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \le \theta - \varepsilon < \theta \\ & \iff \varepsilon \le \theta \end{cases}$$

Se tiene que

$\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon > \theta \\ 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n}_{\in (0,1)} & \text{si } \varepsilon \le \theta \end{cases}$$

$$\therefore \mathbb{P}(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \hookrightarrow \quad Z_n \xrightarrow{P} \theta$$

Teo 1 Sea $\{Z_n\}_{n \ge 1}$ sec. de v.a's t.q. se cumple que $\mathbb{E}\{(Z_n - \theta)^2\} \longrightarrow 0$, $n \to \infty$ (*)

$\Downarrow$

$Z_n \xrightarrow{P} \theta$

Dem)

Del Lema se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \mathbb{P}(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}((Z_n-\theta)^2)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore \mathbb{P}(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff Z_n \xrightarrow{P} \theta$$

Nota: Si Z_n verifica $(\star)$, decimos que Z_n converge en media cuadrática a θ:

$$Z_n \xrightarrow{m.c.} \theta, \; n \to \infty.$$

Prop: $Z_n \xrightarrow{m.c.} \theta \Rightarrow Z_n \xrightarrow{P} \theta \quad (\not\Leftarrow)$ ↳ ejemplo 3.

Cor 1: Si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \theta$ y $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Z_n) = 0$

$$\Downarrow$$

$$Z_n \xrightarrow{P} \theta$$

$$\mathbb{E}((Z_n-\theta)^2) = \underbrace{\mathrm{Var}(Z_n)}_{\to 0 \text{ (Tarea)}} + \underbrace{(\mathbb{E}(Z_n)-\theta)^2}_{\to \theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sigue del Teo 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n-\theta)^2 &= \mathbb{E}(Z_n^2) - 2\theta\mathbb{E}(Z_n) + \theta^2 \\ &= \mathbb{E}(Z_n^2) - (\mathbb{E}(Z_n))^2 + (\mathbb{E}(Z_n))^2 - 2\theta\mathbb{E}(Z_n) + \theta^2 \\ &= \mathrm{Var}(Z_n) + (\mathbb{E}(Z_n) - \theta)^2\end{aligned}$$

Ejemplo

1. $Z_n \sim \mathrm{Ber}(n, p)$

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p \xrightarrow[n\to\infty]{} p$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

2. $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ $\quad X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$

$$\mathbb{E}(Z_n) = \int_0^\theta z \, \frac{n}{\theta}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{n}{n+1}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$$

$$\text{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n^2) - (\mathbb{E}(Z_n))^2$$
$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta^2 - \theta^2 = 0.$$

$$\therefore Z_n \xrightarrow{P} 0$$

3) Caso en que Teo 1. Falla:

$$\mathbb{P}(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left((Z_n - \theta)^2\right) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^4 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

pero $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ y $Z_n \xrightarrow{m.s.} \theta$.

Note que
$$\mathbb{E}\{|Z_n - \theta|^{1/4}\} = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^{1/2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ext. teo 1: Sea $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ una sec. de v.a. t.q. para un $\ell > 0$ se tiene lo siguiente:
$(\star\star)$ $\mathbb{E}(|Z_n - \theta|^\ell) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces $Z_n \xrightarrow{P} \theta$

Dem) Tarea, usar desigualdad de Markov.

Nota: Si (Z_n) verifica $(\star\star)$ decimos que
$$Z_n \xrightarrow{m.\ell} \theta$$

Teo 2 (LDGN):
Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sec. de v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$
$$\Rightarrow \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu = \mathbb{E}(X_1)$$

(es decir, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Dem)

Asumo que existe 2° momento $\Rightarrow Var(X_1) < \infty$.

Lema1 $\forall \varepsilon > 0$, $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Martes 20 Junio 2017.

(LFGN) $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} \bar{X}_n(\omega) = \mu\}) = 1$

↳ convergencia casi segura.

(LDGN) $\bar{X}$ es un estimador consistente para la media poblacional $\mu = \mathbb{E}(X_1)$

Ejemplo

1. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $Ber(p) \Rightarrow \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$
2. $X_1, X_2, \ldots X_n$ i.i.d $Unif(0, \theta) \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \frac{\theta}{2}$
3. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

   $\frac{1}{n}\sum X_i^2 \xrightarrow{P} \mu_2 = \sigma^2 + \mu_1^2 = \mathbb{E}(X_1^2)$
4. $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d $E(\lambda) \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \frac{1}{\lambda}$

Teo 3 Sea $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ secuencia de v.a's t.q. $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua $\Rightarrow g(Z_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$

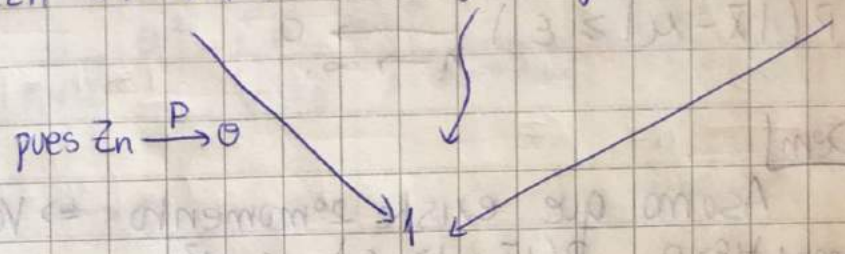
Dem)

g continua $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |Z_n - \theta| < \delta \Rightarrow |g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon$

es decir, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \{|Z_n - \theta| < \delta\} \subseteq \{|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon\}$

(en términos estocásticos)

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{|Z_n - \theta| < \delta\}) \leq \mathbb{P}(\{|g(3_n) - g(\theta)| < \varepsilon\}) \leq 1$



$\therefore$ Por teo del Sandwich,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{|g(3_n) - g(\theta)| < \varepsilon\}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow g(3_n) \xrightarrow{P} g(\theta) \quad \text{(por def.)}$$

Ejemplo

1. $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i i.i.d. $Ber(p)$

$Z_n \sim Ber(n,p) \Rightarrow \frac{Z_n}{n} = \overline{X_i} \xrightarrow{P} p$

$$\Rightarrow g(\overline{X_n}) = \overline{X_n}(1-\overline{X_n}) \xrightarrow{P} p(1-p) = g(p).$$

2. $X_1, \ldots$ i.i.d $E(\lambda) \Rightarrow g(\overline{X_n}) = \frac{1}{\overline{X_n}} \xrightarrow{P} \lambda = g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

3. $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d $N(\mu, \tau^2)$, $g(\overline{X_n}) = \overline{X_n}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu^2 = g(\mu)$.

2. Convergencia en Distribución:

Sea $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ una sec. de v.a's definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y sea Z otra v.a. Luego distribución no depende de n.

- **Def** Decimos que Z_n **converge en distribución** a Z si $F_{Z_n}(z) = \mathbb{P}(Z_n \leq z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z)$ $\forall z$ donde $F_Z(z)$ es continua.
(es decir, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(Z = \varepsilon) > 0$)

Notación: $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ ó $F_{Z_n} \Rightarrow F_Z$

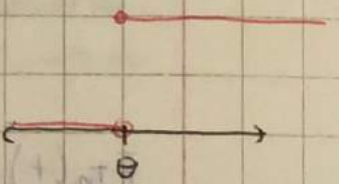
$$\left[\underset{\sim}{Z}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \iff \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{Z}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \underset{\sim}{a}^T Z \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n \right]$$

Ejemplo

1. $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$



2. Sea $Z \equiv \theta$ cte. es decir $\mathbb{P}(Z = \theta) = 1$
$\mathbb{P}(Z \neq \theta) = 0$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta > x \\ 1 & \text{si } \theta \leq x \end{cases}$$

$$\therefore Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \iff \mathbb{P}(Z_n \leq z) \longrightarrow \mathbb{P}(Z \leq z) \quad \forall z \neq \theta.$$
$$\iff \mathbb{P}(Z_n \leq z) \longrightarrow 0 \quad \forall z < \theta$$
$$\mathbb{P}(Z_n \leq z) \longrightarrow 1 \quad \forall z > 0$$

(en θ no importa pues vemos donde F_Z es continua).

Aplicación:

- $\mathbb{P}(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$

  $\mathbb{P}(Z_n = \theta + n^2) = 1/n \quad \forall n \geq 1$

  $\Rightarrow Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \theta$

Dem) $F_{Z_n}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < \theta \\ 1 - 1/n & \theta < z < \theta + n^2 \\ 1 & z \geq \theta + n^2 \end{cases}$

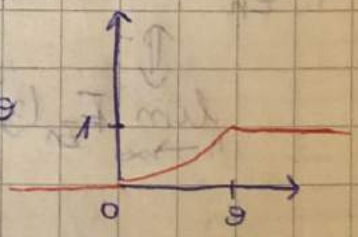
$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(\theta) \begin{cases} 0 & \text{si } z < \theta \\ 1 & \text{si } z \geq \theta \end{cases}$

- Sea $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ donde $X_i \sim U(0, \theta)$

  $T_n = n(\theta - Z_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} T \sim E(1/\theta)$

$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \left(\frac{z}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 < z < \theta \\ 1 & \text{si } z \geq \theta \end{cases}$



$F_{T_n}(t) = \mathbb{P}(T_n \leq t)$

$= \mathbb{P}(n(\theta - Z_n) \leq t)$

$= \mathbb{P}(Z_n \geq \theta - t/n)$

$= 1 - \mathbb{P}(Z_n < \theta - t/n)$

$= 1 - F_{Z_n}(\theta - t/n)$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } \theta - t/n < 0 \iff t > n\theta \\ 1 - \left(\frac{\theta - t/n}{\theta}\right)^n & \text{si } \theta \leq \theta - \frac{t}{n} \iff 0 < t \leq n\theta \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } \theta + \frac{t}{n} \geq \theta \iff t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{\theta - t/n}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 < t \leq n\theta \\ 1 & \text{si } t > n\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ 1-e^{-t/\theta} & \text{si } t>0 \end{cases}$$

$$F_T(t)$$

donde $T \sim E(1/\theta)$.

Teo 4

(a) $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$

$\Updownarrow$

$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$ $\forall t$ donde las f.g.m. estén definidas.

(b) $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \iff \lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t)$ $\forall t$

donde $\varphi_X(t)$ es la función característica de X.

Aplicación

Para demostrar que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ basta demostrar que $M_{Z_n}(t)$ converge a $M_Z(t)$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplos

1. Para demostrar que
$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$
basta demostrar que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

2. Sea $Z_n \sim Bin(n, p_n)$ $\quad n \cdot p_n = \lambda$ $\forall n \ge 1$

$\Downarrow$

$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim P(\lambda)$

Dem

$$M_{Z_n}(t) = (1-p_n + p_n(e^t))^n = (1 + p_n(e^t-1))^n$$
$$= \left(1 + \frac{\lambda(e^t-1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(e^t-1)}.$$

3. $Z_n \sim P(n)$, $n \geq 1$ (por ejemplo, $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $P(1)$)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n)$$

$$\Downarrow$$

$$T_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} T \sim N(0,1).$$

Dem

$$M_{T_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\left(\frac{Z_n - n}{\sqrt{n}}\right)}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left\{e^{t/\sqrt{n}\, Z_n}\right\} \cdot e^{-t\sqrt{n}}$$

$$= e^{-t\sqrt{n}}\, M_{Z_n}(t/\sqrt{n})$$

$$M_{T_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}}\, e^{n(e^{t/\sqrt{n}} - 1)}$$

$$= e^{n\left(e^{t/\sqrt{n}} - 1/\sqrt{n} - 1\right)}$$

$$= e^{n\,h(n)} \quad \text{donde } h(n) = e^{t/\sqrt{n}} - 1/\sqrt{n} - 1.$$

expansión de Taylor. ↓ resto. ↑

$$h(n) = \cancel{1} + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(\sqrt{n})^2} + \frac{1}{6}\frac{t^3}{(\sqrt{n})^3} \cdot e^{s_{t/\sqrt{n}}} - \frac{t}{\sqrt{n}} - \cancel{1} \qquad s \in (0,1)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \frac{1}{6}\frac{t^3}{n\sqrt{n}}\, e^{s t/\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow n\,h(n) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}\frac{t^3}{\sqrt{n}}\, e^{s t/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{t^2}{2}$$

$$M_{T_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t) \quad \text{donde } Z \sim N(0,1).$$

Tarea Si $Z_n \sim \chi^2_n$, $n \geq 1$, mostrar que $\frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

Teo S Si $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \Rightarrow g(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(Z)$ $\forall$ función continua g.

Dem / ~~Tarea~~. Omitida.

Ejemplo

1. $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$X_i \overset{i.i.d}{\sim} U(0,\theta)$

$T_n = n(\theta - Z_n) \xrightarrow{n\to\infty} T \sim E(1/\theta)$

$\Downarrow$

$g(T_n) = \frac{T_n}{\theta} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{T}{\theta} \sim E(1)$

2. Si $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(\mu, \tau^2)$

$\Downarrow$

$\frac{Z_n - \mu}{\tau} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{Z-\mu}{\tau} \sim N(0,1)$

$\Downarrow$

$\left(\frac{Z_n - \mu}{\tau}\right)^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\frac{Z-\mu}{\tau}\right)^2 \sim \chi^2_1$

Teo 6

Sean $X_1, \dots, X_n, \dots$ v.a's i.i.d con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \tau^2$ (ambos finitos)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\tau} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\tau} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

Dem

Se usa función caract. y expansión de Taylor.

Aplicación: Para "n suf. grande"

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\tau} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

$\Updownarrow$

$$\bar{X}_n \overset{\cdot}{\sim} N(\mu, \tau^2/n)$$

Ejemplo

1) $X_1, \dots, X_n, \dots$ i.i.d $Ber(p)$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\cdot}{\sim} N(np,\ np(1-p)) \text{ "para } n \text{ grande"}.$$