PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano-Valle
Ayudantes: Nicolás Ortiz y Daniel Gálvez
Primer semestre 2026

Pauta I3: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Problema 1: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas (iid), con función de distribución acumulada F dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}5, & 0 \leq x < 1, \\ 0{,}8, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Determine la función de probabilidad de $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, X_2\}$.

(b) Determine la función de probabilidad de $X_{(2)} = \text{máx}\{X_1, X_2\}$.

(c) Sea $R = X_{(2)} - X_{(1)}$. Calcule $E(R)$.

Problema 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo cuya función generadora de momentos (fgm) conjunta es:

$$M_{X,Y}(t, s) = \frac{1}{(1-t)(1-t-s)}, \quad t < 1,\ t + s < 1.$$

(a) Obtenga las fgm marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes?

(b) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

(c) Obtenga la fgm de $Z = X - Y$ y úsela para calcular $E(Z)$ y $\text{Var}(Z)$.

Problema 3: Sean X e Y los tiempos de transmisión de dos computadoras, independientes, con densidades marginales:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se definen $U = XY$ y $V = Y$.

(a) Determine la densidad conjunta original $f_{X,Y}(x, y)$. Justifique.

(b) Obtenga la densidad conjunta final $f_{U,V}(u, v)$ e indique su soporte. ¿Pueden U y V ser independientes?

(c) Calcule $P(U \leq 0{,}25 \mid V \leq 0{,}5)$.

SOLUCIÓN:

Problema 1:

(a) Recordemos que la función acumulada del estadístico de orden del mínimo corresponde a:

$$F_{X_{(1)}}(k) = 1 - [1 - F_X(k)]^2$$

Y a su vez, que el soporte de $X_{(1)}$ esta dado por $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Luego, para determinar la función de masa de $X_{(1)}$, se debe proceder de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P(X_{(1)} = 0) &= F_{X_{(1)}}(0) \\
&= 1 - [1 - 0{,}5]^2 \\
&= \frac{3}{4} \\
P(X_{(1)} = 1) &= F_{X_{(1)}}(1) - F_{X_{(1)}}(0) \\
&= 1 - [1 - 0{,}8]^2 - \frac{3}{4} \\
&= \frac{21}{100} \\
P(X_{(1)} = 2) &= F_{X_{(1)}}(2) - F_{X_{(1)}}(1) \\
&= 1 - [1 - 1]^2 - \frac{96}{100} \\
&= \frac{4}{100}
\end{aligned}$$

Luego,

$$P(X_{(1)} = k) = \begin{cases} 0{,}75 & k = 0 \\ 0{,}21 & k = 1 \\ 0{,}04 & k = 2 \end{cases}$$

- **1.5 pts** por obtener $P(X_{(1)} = k)$. *(0.5 pts por cada componente)*
- **0.5pts** por plantear $F_{X_{(1)}}(k) = 1 - [1 - F_X(x)]^2$.

(b) El procedimiento es análogo al inciso anterior. Por ende,

$$P(X_{(2)} = k) = \begin{cases} 0{,}25 & k = 0 \\ 0{,}39 & k = 1 \\ 0{,}36 & k = 2 \end{cases}$$

- **1.5 pts** por obtener $P(X_{(2)} = k)$. *(0.5 pts por cada componente)*
- **0.5pts** por plantear $F_{X_{(2)}}(k) = [F_X(x)]^2$.

(c) Para determinar $\mathbb{E}(R)$, debemos aplicar las propiedades de la esperanza. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) &= \mathbb{E}(X_{(2)}) - \mathbb{E}(X_{(1)}) \\ &= \sum_{k=1}^{2} k \cdot P(X_{(2)} = k) - \sum_{w=1}^{2} w \cdot P(X_{(1)} = k) \\ &= 1,11 - 0,29 \\ &= 0{,}82\end{aligned}$$

- **1pts** por aplicar las propiedades de la esperanza.
- **1pts** por el resultado de la esperanza. *(puede quedar expresado)*

Pregunta 2:

(a) Para determinar las funciones generadoras marginales de X e Y, basta con:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= M_{X,Y}(t,0) \\ &= \frac{1}{(1-t)^2} \quad t<1 \\ M_Y(s) &= M_{X,Y}(0,s) \\ &= \frac{1}{(1-s)} \quad s<1\end{aligned}$$

Luego, es fácil notar que $M_{X,Y}(t,s) \neq M_X(t)M_Y(s)$. Por ende, X e Y no son independientes.

- **0.75pts** por determinar cada generadora de momentos marginal. *(total 1.5pts)*
- **0.5pts** por determinar que X e Y no son independientes.

(b) Note que $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, luego:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \frac{\partial^2 M_{X,Y}(t,s)}{\partial t \partial s}\Big|_{t=0,s=0} \\ &= 3 \\ \mathbb{E}(X) &= \frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} \\ &= 2 \\ \mathbb{E}(Y) &= \frac{\partial M_Y(t)}{\partial s}\Big|_{s=0} \\ &= 1\end{aligned}$$

Juntando todo se obtiene que,

$$Cov(X,Y) = 1$$

- **0.5pts** por cada momento calculado. *(1.5 total)*
- **0.5pts** por el resultado de la covarianza.

(c) Para determinar la función generadora de momentos de Z, se debe proceder de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}(exp\{tZ\}) \\ &= \mathbb{E}(exp\{t(X-Y)\}) \\ &= \mathbb{E}(exp\{tX-tY)\}) \\ &= M_{X,Y}(t,-t) \\ &= \frac{1}{(1-t)} \quad t<1 \end{aligned}$$

Notese que la expresión anterior corresponde a la función generadora de momentos de una distribución expotencial; $Z \sim exp(1)$. Luego $\mathbb{E}(X)=1$ y $\mathbb{V}(X)=1$.

- **1pts** por determinar $M_Z(t)$.
- **0.5pts** por $\mathbb{E}(X)$.
- **0.5pts** por $\mathbb{V}(X)$.

Pregunta 3:

(a) Como X e Y son independientes, la densidad conjunta es el producto de las marginales:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = 2x, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

- **1pts** por justificar la independencia ($f_{X,Y} = f_X\, f_Y$).
- **1pts** por la densidad $f_{X,Y}(x,y) = 2x$ con su soporte.

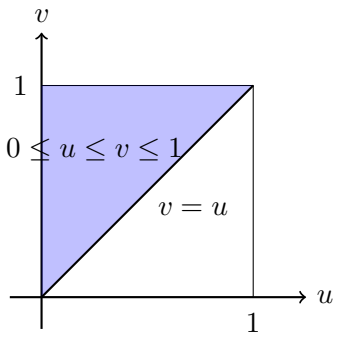
(b) La transformación es $U = XY$, $V = Y$, con inversa $X = U/V$, $Y = V$. El jacobiano es:

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{v} \end{aligned}$$

Luego, con $|J| = 1/v$:

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}\Big(\frac{u}{v}, v\Big)\,|J| \\ &= 2 \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{v} \\ &= \frac{2u}{v^2} \end{aligned}$$

El soporte se obtiene de $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le u \le v$ y $0 \le y \le 1 \Rightarrow 0 \le v \le 1$, es decir $0 \le u \le v \le 1$:



$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{2u}{v^2}, & 0 \le u \le v \le 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

No pueden ser independientes: el soporte es triangular ($u \le v$), de modo que el recorrido de U depende del valor de V.

- 0.5 pts por la transformación inversa $X = U/V$, $Y = V$.
- 0.5 pts por el jacobiano $|J| = 1/v$.
- 0.5 pts por la densidad $f_{U,V}(u,v) = 2u/v^2$.
- 0.5 pts por el soporte $0 \le u \le v \le 1$ y notar que no son independientes.

(c) Por definición de probabilidad condicional:

$$P(U \le 0{,}25 \mid V \le 0{,}5) = \frac{P(U \le 0{,}25,\, V \le 0{,}5)}{P(V \le 0{,}5)}.$$

Como $V = Y \sim U(0,1)$, el denominador es $P(V \le 0{,}5) = 0{,}5$. Para el numerador, integrando sobre el soporte $u \le v$ con $v \le 0{,}5$ y $u \le 0{,}25$:

$$\begin{aligned} P(U \le 0{,}25,\, V \le 0{,}5) &= \int_0^{0{,}25} \int_0^{v} \frac{2u}{v^2}\, du\, dv + \int_{0{,}25}^{0{,}5} \int_0^{0{,}25} \frac{2u}{v^2}\, du\, dv \\ &= \int_0^{0{,}25} 1\, dv + \int_{0{,}25}^{0{,}5} \frac{(0{,}25)^2}{v^2}\, dv \\ &= 0{,}25 + 0{,}0625 \left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}5} \right) = 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(U \le 0{,}25 \mid V \le 0{,}5) = \frac{0{,}375}{0{,}5} = 0{,}75.$$

- 0.5 pts por plantear el cociente condicional y obtener $P(V \le 0{,}5) = 0{,}5$.
- 1 pt por plantear correctamente los límites de integración (separar la región en $u \le v$).
- 0.5 pts por el resultado 0,75.