PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano-Valle
Ayudante: Nicolás Ortiz
Primer semestre 2026

I2: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Pregunta 1: Un servidor de aplicaciones tiene una probabilidad $p = 0,3$ de procesar correctamente una solicitud de conexión en cada intento, de forma independiente. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de intentos fallidos antes de lograr la primera conexión exitosa.

(a) Identifique el recorrido y la función de probabilidad de la variable X. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor falle exactamente 4 veces antes de conectar?

(b) Demuestre que $P(X \leq x) = 1 - (1-p)^{x+1}$ para todo x en el recorrido de X. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor falle más de 5 veces?

(c) Demuestre que la función generadora de momentos (fgm) de X es $M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}$ e identifique su dominio de definición $\mathcal{T}$. A partir de $M_X(t)$, obtenga el número esperado de fallos. ¿Cuántos intentos se esperan, en total, para lograr la conexión?

(d) Si se sabe que el servidor ya ha fallado 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de que falle al menos 2 veces más antes de conectar? Explique la relación de este resultado con la propiedad de falta de memoria.

Pregunta 2: Sea $X \sim N(0,1)$ con función de densidad $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sea $Y = e^X$. Determine el soporte de Y y calcule $E[Y]$ y $P(Y > 1)$.

(b) Demuestre que la función de densidad de Y viene dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln y)^2}{2}\right\}, & y > 0 \\ 0, & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

(c) Sea $Z = (\ln Y)^2$. Encuentre la función de densidad de Z e identifique su distribución.

Pregunta 3: Sea $X \sim U(0,10)$. Se define $Y = [X]$ como la parte entera (el mayor entero menor o igual a X).

(a) Identifique el recorrido de Y. Determine $P(Y = k)$ e identifique la distribución de Y.

(b) Calcule $E[Y]$ y $Var(Y)$. Con estos datos, obtenga una cota superior no trivial para la probabilidad de que Y difiera de su media en al menos 4 unidades.

(c) Calcule el valor exacto de la probabilidad requerida en el inciso anterior y compárelo con la cota obtenida. ¿Qué puede concluir sobre dicha cota?

Formulario: $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (r \neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

SOLUCIÓN:

1. *a*) Nótese que X cuenta el número de intentos fallidos antes de lograr la primera conexión exitosa; por lo tanto, $X \sim Geom(0{,}3)$. El recorrido de X es $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, ...\}$ y su función de probabilidad es:

$$P(X = x) = (1-p)^x p, \quad x \in \{0, 1, 2, ...\}$$

Luego, la probabilidad de que el servidor falle exactamente 4 veces antes de conectar es:

$$P(X = 4) = \sum_{x=0}^{4} (1-0{,}3)^x \cdot 0{,}3 = (0{,}7)^4 \cdot 0{,}3$$

(0.5 por identificar $\mathcal{X}$, 0.5 por identificar que $X \sim Geom(0{,}3)$ y 0.5pts por calcular $P(X = 4)$)

b) Para demostrar que $P(X \leq x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, notemos que:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \sum_{k=0}^{x} P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{x} (1-p)^k p \\ &= p \sum_{k=0}^{x} (1-p)^k \\ &= p \cdot \frac{1-(1-p)^{x+1}}{1-(1-p)} \\ &= 1 - (1-p)^{x+1} \end{aligned}$$

Luego, $P(X > 5)$ corresponde a:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - [1 - (1-p)^{5+1}] \\ &= (1-0{,}3)^6 \end{aligned}$$

(0.75pts por la demostración correcta y 0.75pts por calcular $P(X > 5)$)

c) Note que $X \sim Geom(0{,}3)$, por lo tanto, su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = \frac{0{,}3}{1-(1-0{,}3)e^t} \quad \text{para } t < -\ln(1-0{,}3)$$

Luego, el número esperado de fallos es:

$$\begin{aligned} E[X] &= M'_X(0) \\ &= \frac{0{,}3(1-0{,}3)e^0}{(1-(1-0{,}3)e^0)^2} \\ &= \frac{0{,}3(1-0{,}3)}{0{,}3^2} \\ &= \frac{0{,}7}{0{,}3} \approx 2{,}3333 \end{aligned}$$

(1pts por $M_X(t)$ y 0.5 por determinar el número esperado de fallos)

d) Para calcular $P(X \geq 5|X \geq 3)$, notemos que por definición de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5|X \geq 3) &= \frac{P(X \geq 5 \cap X \geq 3)}{P(X \geq 3)} \\ &= \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 3)} \\ &= \frac{(1-0{,}3)^5}{(1-0{,}3)^3} \\ &= (1-0{,}3)^2 \\ &= P(X \geq 2) \approx 0,49 \end{aligned}$$

Este resultado ilustra la falta de memoria, indicando que la probabilidad de fallos adicionales es independiente del historial de intentos previos. Basicamente, los 3 intentos anteriores no influyeron en la probabilidad de fallar 2 veces más. *(1.5pts por demostrar la falta de memoria.*

2. *a*) Note que $Y = e^X$ es una transformación de la variable aleatoria X. El soporte de Y es $(0, \infty)$, ya que $e^X > 0$ para todo $X \in \mathbb{R}$. Para calcular $E[Y]$, utilizamos la función generadora de momentos de X:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[e^X] \quad E[e^{tX}] \text{ con } t = 1 \\ &= M_X(1) \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Luego, $P(Y \geq 1)$:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= P(e^X > 1) \\ &= P(X > 0) \\ &= 1 - P(X \leq 0) \\ &= 1 - \Phi(0) \quad \text{donde } \Phi \text{ es la función de distribución acumulada de } N(0,1) \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

(1pts por el soporte de Y, 0.5pts por calcular $E[Y]$ y 0.5pts por calcular $P(Y \geq 1)$)

b) Para encontrar la función de densidad de Y, utilizamos la transformación de variables. Dado que $Y = e^X$, entonces $X = \ln(Y)$ y $dX/dY = 1/Y$. La función de densidad de Y se obtiene a partir de la función de densidad de X:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\ln(y)) \cdot \left|\frac{dX}{dY}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(y))^2/2} \cdot \frac{1}{y} \\ &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln y)^2}{2}\}\right\} \end{aligned}$$

(0.75pts por la transformación inversa, 0.75pts por aplicar el teorema de cambio variable, 0.5pts por llegar a la expresión solicitada)

c) Para encontrar la función de densidad de $Z = (\ln Y)^2$, primero notemos que Z es una función de X, ya que $Y = e^X$. De hecho, $Z = X^2$. Luego,

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(X^2 \leq z) \\ &= P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) \\ &= P(X \leq \sqrt{z}) - P(X \leq -\sqrt{z}) \\ &= P(X \leq \sqrt{z}) - (1 - P(X \leq -\sqrt{z})) \\ &= \Phi(\sqrt{z}) - (1 - \Phi(-\sqrt{z})) \\ &= 2\Phi(\sqrt{z}) - 1 \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar la función de densidad de Z, derivamos la función de distribución acumulada:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz} P(Z \leq z) \\ &= \frac{d}{dz}[2\Phi(\sqrt{z}) - 1] \\ &= 2 \cdot f_X(\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X \sim \chi^2_1$.

(1.5pts por determinar $f_Z(z)$ y 0.5pts por identificar la distribución de Z. Notese que la solución también puede ser desarrollada via teorema cambio de variable.)

3. *a*) Como $X \sim U(0, 10)$, la variable aleatoria toma valores reales en el intervalo $(0, 10)$. Dado que $Y = [X]$ representa la parte entera de X, los posibles valores que puede tomar Y son los números enteros desde el 0 hasta el 9. Por lo tanto, el recorrido es $\mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Para determinar $P(Y = k)$, notemos que el evento $Y = k$ ocurre si y solo si $k \leq X < k+1$. Como X es uniforme en $(0, 10)$, su densidad es constante $f_X(x) = \frac{1}{10}$. Luego:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(k \leq X < k + 1) \\ &= \int_k^{k+1} \frac{1}{10} dx \\ &= \frac{1}{10} \quad \text{para } k \in \{0, 1, \ldots, 9\} \end{aligned}$$

Dado que la probabilidad es constante (1/10) para todos los valores del recorrido, se identifica que $Y \sim Unif\{0, 9\}$. *(1pts por el recorrido, 0.5pts por calcular $P(Y = k)$ y 0.5pts por identificar la distribución Uniforme Discreta)*

b) Para calcular $E[Y]$ y $Var(Y)$, utilizamos las identidades de sumatorias del formulario:

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{9} k \cdot P(Y = k) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{9} k = \frac{1}{10} \cdot \frac{9(10)}{2} = 4{,}5$$

$$E[Y^2] = \sum_{k=0}^{9} k^2 \cdot P(Y = k) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{9(10)(19)}{6} = 28{,}5$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 28{,}5 - (4{,}5)^2 = 28{,}5 - 20{,}25 = 8{,}25$$

Para obtener la cota superior, aplicamos la **Desigualdad de Chebyshev**. Queremos acotar la probabilidad de que Y difiera de su media ($\mu = 4{,}5$) en al menos 4 unidades, es decir, $\epsilon = 4$:

$$\begin{aligned} P(|Y-\mu| \geq \epsilon) &\leq \frac{Var(Y)}{\epsilon^2} \\ P(|Y-4{,}5| \geq 4) &\leq \frac{8{,}25}{4^2} \\ P(|Y-4{,}5| \geq 4) &\leq \frac{8{,}25}{16} \approx 0{,}5156 \end{aligned}$$

(0.75pts por $E[Y]$, 0.75pts por $Var(Y)$ y 0.5pts por plantear y calcular la cota de Chebyshev)

c) Para calcular el valor exacto, desarrollamos el valor absoluto dentro de la probabilidad:

$$\begin{aligned} |Y-4{,}5| \geq 4 \iff Y-4{,}5 \geq 4 \quad &\text{o} \quad Y-4{,}5 \leq -4 \\ Y \geq 8{,}5 \quad &\text{o} \quad Y \leq 0{,}5 \end{aligned}$$

Dado el recorrido de la variable discreta $Y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, los únicos valores que cumplen estrictamente con esta condición son $Y = 9$ (para $Y \geq 8{,}5$) y $Y = 0$ (para $Y \leq 0{,}5$). Luego:

$$\begin{aligned} P(|Y-4{,}5| \geq 4) &= P(Y=0) + P(Y=9) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \end{aligned}$$

Conclusión: Al comparar el valor exacto (0,2) con la cota teórica (0,5156), verificamos que la desigualdad de Chebyshev efectivamente se cumple ($0{,}2 \leq 0{,}5156$). Sin embargo, se concluye que la cota es bastante conservadora o "suelta", ya que sobreestima la probabilidad real en más del doble. Esto es esperable de Chebyshev al ser una cota general aplicable a cualquier distribución.

(1pts por calcular la probabilidad exacta y 1pts por la comparación y conclusión técnica)