PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS / DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
I1

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Nicolás Ortiz.
Primer semestre 2026

1. Un vendedor de productos químicos tiene cuatro clientes en Antofagasta. Durante un viaje de dos días a esa ciudad, puede decidir si visita o no a cada uno de sus clientes, pero no visitará a ninguno de ellos más de una vez.

   a) Especifique un espacio muestral Ω y una σ-álgebra $\mathcal{A}$ apropiados para representar esta situación.

   b) Indique los puntos muestrales correspondientes a cada uno de los siguientes eventos:

      A: el vendedor visitará todos sus clientes,

      B: el vendedor visitará más clientes el primer día que el segundo día,

      C: el vendedor visitará al menos tres clientes el segundo día.

   c) ¿Cuál de los pares de eventos se excluyen mutuamente: A y B, A y C o B y C?

   d) Describa los siguientes eventos e indique sus elementos muestrales: i) A^c, ii) $A \cup B$, iii) $A \cap C$, iv) $A^c \cap B$, v) $A \Delta B$.

2. Se lanza un dado cargado de modo que la probabilidad de cada resultado posible es directamente proporcional al número obtenido. Sea A el suceso "obtener un número par", B el suceso "obtener un número primo" y C el suceso "obtener un número impar".

   a) Calcular la probabilidad de cada suceso elemental.

   b) Calcular $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.

   c) Calcular la probabilidad de que salga un número par o primo.

   d) Calcular la probabilidad de que salga un número par pero no primo.

3. Desarrolle cada uno de los siguientes problemas:

   a) Suponga que se elige un punto (x, y) al azar dentro del cuadrado unitario $(0, 1)^2$. Asumiendo un modelo de probabilidad uniforme (geométrico) para este experimento, graficar y calcular las probabilidad de los siguientes eventos: $A =$ la diferencia entre x e y es mayor que $1/2$, y $B =$ la suma entre x e y es mayor que 1; ¿son A y B eventos independientes?

   b) Para la fabricación de una partida de piezas se utilizaron 3 máquinas, A, B y C, con las que se fabricaron el 20 %, 30 % y 50 % de las piezas respectivamente. Los porcentajes de piezas defectuosas que tales máquinas producen son, respectivamente, 1 %, 2 % y 3 %. Determinar la probabilidad de que una pieza defectuosa haya sido producida por la máquina B.

SOLUCIÓN:

1. a)

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2 : d_1 + d_2 \leq 4\} \\ &= \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4), \\ &\quad (1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0), \\ &\quad (2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(4,0)\} \\ \mathcal{A} &= P(\Omega)\end{aligned}$$

- 0.5pts por determinar Ω
- 0.5 pts por determinar $\mathcal{A}$
- *No hay puntaje parcial*

b)

$$\begin{aligned}A &= \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\} \\ B &= \{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(4,0)\} \\ C &= \{(0,3),(1,3),(0,4)\}\end{aligned}$$

- 0.5pts por determinar los puntos muestrales de cada evento.
- *No hay puntaje parcial*

c) Es claro notar que el par B y C son mutuamente excluyentes, y es:

$$\begin{aligned}B \cap C &= \{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(4,0)\} \cap \{(0,3),(0,4)\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

- 1pt por determinar que el par B y C es mutuamente excluyente.
- *No hay puntaje parcial*

d) I) A^c: El vendedor no visitará a todos sus clientes (visitará 3 o menos en total).

$$A^c = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(3,0)\}$$

II) $A \cup B$: El vendedor visitará a todos sus clientes o visitará más clientes el primer día que el segundo.

$$A \cup B = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0),(1,0),(2,0),(2,1),(3,0)\}$$

III) $A \cap C$: El vendedor visitará a todos sus clientes y además visitará al menos a tres el segundo día.

$$A \cap C = \{(0,4),(1,3)\}$$

IV) $A^c \cap B$: El vendedor no visitará a todos sus clientes, pero visitará más clientes el primer día que el segundo.

$$A^c \cap B = \{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0)\}$$

v) $A\Delta B$: El vendedor visitará a todos sus clientes o visitará más el primer día que el segundo, pero no ambas cosas a la vez.

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= \{(0,4),(1,3),(2,2),(1,0),(2,0),(2,1),(3,0)\} \end{aligned}$$

- 0.5 pts por cada inciso correcto (0.2 pts por la descripción verbal y 0.3 pts por los elementos muestrales).
- *No hay puntaje parcial*

2. *a*) Nos dicen que el dado está cargado y que la probabilidad de cada resultado es directamente proporcional al número obtenido. Matemáticamente, esto significa que para cualquier resultado $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, su probabilidad es de la forma:

$$\mathbb{P}(k) = \frac{k}{c}$$

donde c es la constante de proporcionalidad.

Por axioma de probabilidad, sabemos que la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales (Ω) debe ser igual a 1:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(k) &= 1 \\ \frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{3}{c} + \frac{4}{c} + \frac{5}{c} + \frac{6}{c} &= 1 \\ \frac{21}{c} &= 1 \\ c &= 21 \end{aligned}$$

Luego, la probabilidad de cada suceso elemental es:

$$\mathbb{P}(k) = \frac{k}{21} \quad k \in \{1,\ldots,6\}$$

- 1.5pts por determinar la probabilidad de los eventos elementales.

b) Dado que los resultados de un único lanzamiento son eventos mutuamente excluyentes entre sí, podemos aplicar el axioma de aditividad $\big(\mathbb{P}(E) = \sum_{k\in E} \mathbb{P}(\{k\})\big)$:

- Sea $A = \{2,4,6\}$ (números pares):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

- Sea $B = \{2,3,5\}$ (números primos):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) \\ &= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

- Sea $C = \{1, 3, 5\}$ (números impares):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) \\ &= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

- 1.5 pts en total (0.5 pts por cada probabilidad calculada correctamente).

c) Este evento corresponde a la unión entre los números pares (A) y los números primos (B), lo que corresponde a $A \cup B$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(\{2, 4, 6\} \cup \{2, 3, 5\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2, 3, 4, 5, 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} \\ &= \frac{20}{21}\end{aligned}$$

- 1.5pts por calcular la probabilidad.

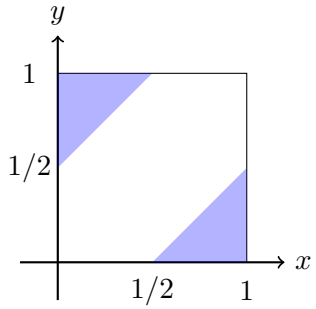
d) Este evento corresponde a la intersección entre los números pares (A) y los números que no son primos (B^c), lo que corresponde a $A \setminus B$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(\{2, 4, 6\} \cap \{1, 4, 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{4, 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= \frac{4}{21} + \frac{6}{21} \\ &= \frac{10}{21}\end{aligned}$$

- 1.5pts por calcular la probabilidad.

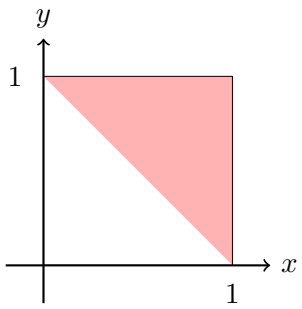
3. a) Dado que el espacio muestral es el cuadrado unitario $\Omega = (0, 1)^2$, su área total es 1. Bajo un modelo uniforme, la probabilidad de cualquier evento es exactamente el área de la región que define.

- Evento A (Diferencia mayor a 1/2): $|x - y| > 1/2 \implies y < x - 1/2$ ó $y > x + 1/2$. Geométricamente, son dos triángulos rectángulos en las esquinas del cuadrado.



$$\mathbb{P}(A) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- Evento B (Suma mayor a 1): $x + y > 1 \implies y > 1 - x$.
  Geométricamente, es el triángulo superior derecho formado por la diagonal principal.



$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

- Intersección ($A \cap B$): Al superponer ambas regiones, la recta $y = 1 - x$ corta exactamente por la mitad a los dos triángulos azules del Evento A. El área intersectada se compone de dos triángulos más pequeños (de base $1/2$ y altura $1/4$).

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

- Verificación de Independencia: Se debe comprobar que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

  Como $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$, se concluye que los eventos sí son independientes.

- 0.75 pts por graficar correctamente A y calcular $\mathbb{P}(A) = 1/4$.
- 0.75 pts por graficar correctamente B y calcular $\mathbb{P}(B) = 1/2$.
- 0.75 pts por determinar correctamente el área de intersección $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.
- 0.75 pts por demostrar la independencia.

b) Definimos los eventos M_A, M_B, M_C correspondientes a cada máquina, y el evento D como "la pieza es defectuosa". A partir del enunciado obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_A) &= 0{,}20, \quad \mathbb{P}(D|M_A) = 0{,}01 \\ \mathbb{P}(M_B) &= 0{,}30, \quad \mathbb{P}(D|M_B) = 0{,}02 \\ \mathbb{P}(M_C) &= 0{,}50, \quad \mathbb{P}(D|M_C) = 0{,}03 \end{aligned}$$

Se solicita calcular $\mathbb{P}(M_B|D)$. Aplicando el Teorema de Bayes y la Ley de Probabilidad

Total en el denominador:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_B|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|M_B)\mathbb{P}(M_B)}{\mathbb{P}(D|M_A)\mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(D|M_B)\mathbb{P}(M_B) + \mathbb{P}(D|M_C)\mathbb{P}(M_C)} \\
&= \frac{(0{,}02)(0{,}30)}{(0{,}01)(0{,}20) + (0{,}02)(0{,}30) + (0{,}03)(0{,}50)} \\
&= \frac{0{,}006}{0{,}002 + 0{,}006 + 0{,}015} \\
&= \frac{0{,}006}{0{,}023} = \frac{6}{23} \approx 0{,}2608
\end{aligned}$$

- 0.75 pts por identificar correctamente las prioris y condicionales iniciales.
- 0.75 pts por aplicar la probabilidad total para $\mathbb{P}(D)$.
- 0.75 pts por plantear correctamente el Teorema de Bayes.
- 0.75 pts por llegar al resultado (6/23).