PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS / DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
I2

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudantes: Daniel Gálvez, Nicolás Ortiz, Yoseph Barrera.

Segundo semestre 2025

1. Sea X una variable aleatoria con función (de) distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -2), \\ 1-p, & x \in [-2, 0), \\ 1-p+px/2, & x \in [0, 2), \\ 1, & x \in [2, \infty), \end{cases}$$

donde $p \in (0, 1)$.

a) Grafique $F_X(x)$ y calcule $P(X = -2)$, $P(X = 0)$ y $P(X \in [-1, 2])$.

b) Calcule $\mathrm{E}(X)$ e indique una mediana para X.

c) Sea $Y = X^2 - X - 2$. Calcule $P(Y \leq 0)$.

a) La siguiente figura nuestra la fda para $p = 0{,}3$.

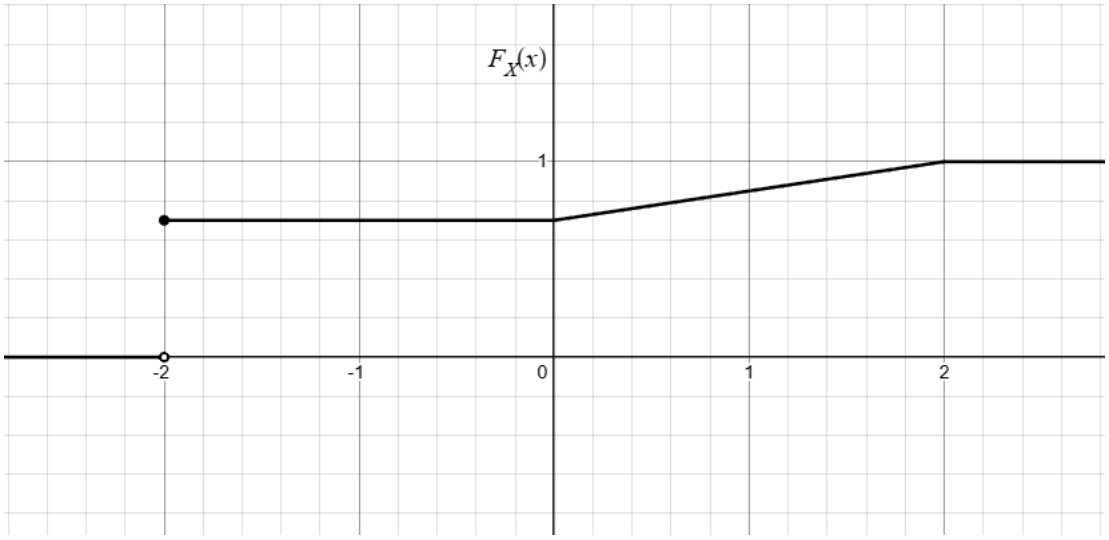


Figura 1: $F_X(x)$ - Problema 1

Las probabilidades son

$$\begin{aligned} P(X=-2) &= F_X(-2) - F_X(-2^-) \\ &= 1 - p - 0 \\ &= 1 - p \\ P(X=0) &= F_X(0) - F_X(0^-) \\ &= 1 - p + p \cdot 0/2 - (1-p) \\ &= 0 \\ P(X \in [-1,2]) &= P(-1 \leq X \leq 2) \\ &= P(X=-1) + P(0 \leq X \leq 2) \\ &= 0 + F_X(2) - F_X(0) \\ &= 1 - (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

- (**0.5**) por el dibujo (basta con que se aprecie una linea horizontal en $[-2,0)$ y una recta en $(0,1)$)
- (**0.5**) por cada probabilidad bien calculada (**1.5** en total)

b) Notando que $\mathcal{X} = \{-2\} \cup [0,2)$, con parte discreta tal que $P(X=-2) = 1-p$ y parte continua $f_X(x) = p/2$ para $0 \leq x < 2$, se tiene

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \cdot P(X=-2) + \int_0^2 x \frac{p}{2} dx \\ &= -2 \cdot (1-p) + p \\ &= -2 + 3p \end{aligned}$$

La mediana va a depender del valor de p, donde se tienen los siguientes casos

1) $p < 1/2$
   En este caso se tiene que $1 - p > 1/2$, donde se deduce que $P(X \leq -2) = 1 - p > 1/2$ y $P(X \geq -2) = 1 - P(X < -2) = 1 > 1/2$, por lo que $m = -2$ es una mediana.
2) $p = 1/2$
   En este caso se tiene $1 - p = 1/2$, de modo que para cualquier $m \in [-2,0)$ se cumple que

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= 1 - p \geq 1/2 \\ P(X \geq m) &= 1 - P(X < m) = p \geq 1/2 \end{aligned}$$

   por lo que cualquier $m \in [-2,0)$ es mediana.
3) $p > 1/2$
   En este caso $1 - p < 1/2$, por lo que se debe buscar m tal que $F_X(x) = 0{,}5$ en la parte continua, de modo que

$$\begin{aligned} 1 - p + \frac{px}{2} &= 0{,}5 \\ \Rightarrow x &= \frac{2p-1}{p} \end{aligned}$$

- (**1**) por calcular correctamente la media de X
- (**1**) por determinar correctamente una mediana para X

c) Analizando la función cuadrática $y = x^2 - x - 2$ se deduce que

$$\begin{aligned} P(Y \leq 0) &= P(X^2 - X - 2 \leq 0) \\ &= P(-1 \leq X \leq 2) \\ &= p \end{aligned}$$

- (**1**) por analizar correctamente la ecuación cuadrática (ya sea calcular ceros o determinar la región correspondiente)
- (**1**) por calcular correctamente la probabilidad solicitada.

2. Sea X una variable aleatoria continua con función (de) densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

a) Encuentre la función (de) distribución de X, e indique su media.

b) Obtenga F_Y en términos de F_X bajo las siguientes transformaciones:

i) $Y = X^2$.

ii) $Y = \max\{0, X\}$.

En ambos casos, obtenga la media de Y.

a) Note que la fdp la podemos escribirse como

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

o equivalentemente

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 - x, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces, si $x \in (-1, 0)$, entonces

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} 1 + u du = x + 1 + \frac{x^2 - 1}{2}$$

Si $x \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \le x) \\ &= F_X(0) + P(0 < X < x) \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Luego,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ x + 1 + \dfrac{x^2 - 1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Para calcular la media, se puede argumentar que $f_X(x)$ es simétrica en torno al cero, por lo que $E(X) = 0$, o alternativamente se puede calcular

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathcal{X}} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^{0} x(1 + x) dx + \int_{0}^{1} x(1 - x) dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (**1**) por calcular correctamente $F_X(x)$
- (**1**) por calcular correctamente la media

b) Para la primera transformación se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - [1 - F_X(\sqrt{y})], \quad \text{Por simetría} \\ &= 2F_X(\sqrt{y}) - 1 \end{aligned}$$

Usando esto se tiene

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 2F_X(\sqrt{y}) - 1 \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}}(1 - \sqrt{y}) \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = \frac{1 - \sqrt{y}}{\sqrt{y}}, \quad 0 < y < 1$$

por lo que la media es

$$E(Y) = \int_0^1 y \frac{1 - \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{6}$$

Para la segunda transformación note que

$$Y = max\{0, X\} = \begin{cases} 0, & -1 < X < 0 \\ X, & 0 \leq X < 1 \end{cases}$$

entonces, si $y > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(Y = 0) + P(0 \leq X < y) \\ &= P(-1 < X < 0) + F_X(y) - F_X(0) \\ &= F_X(0) - F_X(-1) + F_X(y) - F_X(0) \\ &= F_X(y) \end{aligned}$$

A partir de esto se puede deducir Y tiene parte discreta tal que $P(Y = 0) = 1/2$ y parte continua tal que $f_Y(y) = 1 - y$ para $0 < y < 1$, por lo que la esperanza queda como

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \cdot P(Y = 0) + \int_0^1 y(1 - y) dy \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Lo que alternativamente se podía calcular como

$$\begin{aligned} E(max\{0,X\}) &= \int_{-1}^{1} max\{0,x\} f_X(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} 0 \cdot (1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (**1**) por expresar correctamente $F_Y(y)$ en cada caso
- (**1**) por calcular correctamente la media en cada caso

3. Un emprendedor arrienda tiempo en su computadora por periodos de t horas a un precio de \$600 por hora. Sea X_t el número de veces que la computadora falla durante t horas de funcionamiento. Suponga que $X_t \sim$ Poisson(λt); es decir,

$$P(X_t = x) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, & x = 0,1,\ldots, \\ 0, & \text{e.o.c.}, \end{cases}$$

donde $\lambda = 0{,}5$ representa la tasa de falla por hora.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que la computadora falle al menos una vez en una hora de funcionamiento?

b) Si la computadora falla X_t veces en t horas, la reparación tiene un costo $\$50X_t^2$. ¿ Cómo debería el emprendedor elegir t de forma tal que maximice la utilidad esperada?

a) Se tiene $t = 1$, y se pide $P(X_1 \geq 1)$, entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 1) &= 1 - P(X_1 < 1) \\ &= 1 - P(X_1 = 0) \\ &= 1 - e^{-0{,}5} \end{aligned}$$

- (**3**) por calcular correctamente $P(X_1 \geq 1)$. Se asigna **1** por algún desarrollo con sentido.

b) La v.a que modela la utilidad se puede definir como $Y = 600t - 50X_t^2$, puesto que se obtienen ganancias de \$600 por hora, y la v.a $50X_t^2$ modela el costo de reparación según el número de fallos por hora, se pide entonces maximizar la esperanza de Y con respecto de t. La esperanza es

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(600t - 50X_t^2) \\ &= 600t - 50E(X_t^2) \\ &= 600t - 50[Var(X_t) + E(X_t)^2] \\ &= 600t - 50[0{,}5t + 0{,}5^2t^2] \\ &= 600t - 50 \cdot 0{,}5t + 50 \cdot 0{,}5^2t^2 \\ &= 575t + 12{,}5t^2 \end{aligned}$$

Ahora definamos $g(t) = 575t - 12{,}5t^2$, derivando e igualando a cero se obtiene que el emprendedor debe elegir $t = 23$

- (**1.5**) por calcular correctamente $E(Y)$
- (**1.5**) por calcular el valor de t que maximiza la expresión de la utilidad.