PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Solución I3 - Modelos probabilísticos

1. Sean X e Y variables aleatorias independientes, con $X \sim U(-1,1)$ e $Y \sim U(\{-1,1\})$; es decir, X tiene distribución continua, con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

mientras que Y tiene distribución discreta, con función de probabilidad

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y \in \{-1,1\} \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

(a) Obtenga las funciones generadoras de momentos (f.g.m.) marginales de X e Y

(b) Obtenga la f.g.m. de $U = X + Y$. ¿Se cumple que $U \sim U(-2,2)$?

(a) Utilizando el formulario se tiene

$$M_X(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \sum_{y \in \{-1,1\}} e^{ty} P(Y = y) \\ &= \frac{e^{-t} + e^t}{2} \end{aligned}$$

- **[1.5]** por calcular correctamente $M_X(t)$
- **[1.5]** por calcular correctamente $M_Y(t)$

(b) Utilizando el hecho de que son independientes se tiene

$$\begin{aligned} M_U(s) &= M_X(s) M_Y(s) \\ &= \frac{e^s - e^{-s}}{2s} \frac{e^{-s} + e^s}{2} \\ &= \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{4s} \\ &= \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{(2 - (-2))s} \end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una uniforme, en particular $U \sim U(-2,2)$.

- **[1.5]** por calcular correctamente $M_U(s)$
- **[1.5]** por concluir que $U \sim U(-2,2)$

2. Se lanza una moneda honesta 3 veces. Sean:

$$X = \text{número de caras en los dos primeros lanzamientos,}$$
$$Y = \text{número de caras en los dos últimos lanzamientos.}$$

(a) Construya una tabla con la función de probabilidad conjunta de (X, Y).

(b) Indique las distribuciones marginales de X y de Y. ¿Son X e Y independientes?

(a) La tabla está dada por

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$1/8$	$1/8$	0
$X=1$	$1/8$	$1/4$	$1/8$
$X=2$	0	$1/8$	$1/8$

- **[3]** por calcular correctamente la tabla
- Se asigna puntaje parcial en caso de algún desarrollo con sentido.

(b) Sumando hacia abajo y a la derecha se tiene que

$$P(X=x) = \begin{cases} 1/4, & x=0 \\ 1/2, & x=1 \\ 1/4, & x=2 \end{cases}$$

y

$$P(Y=y) = \begin{cases} 1/4, & y=0 \\ 1/2, & y=1 \\ 1/4, & y=2 \end{cases}$$

Claramente no son independientes, pues

$$P(X=0, Y=0) \neq P(X=0)P(Y=0)$$

- **[1]** por determinar correctamente cada marginal
- **[1]** por concluir que X, Y no son independientes
- No se asigna puntaje parcial o por arrastre

3. Sean $U = X + Y$ y $V = X - Y$, donde X e Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) $N(0,1)$. Pruebe que U y V son variables aleatorias iid $N(0,2)$. Justifique su respuesta.

Se considera el método del Jacobiano. Se tiene

$$x = \frac{u+v}{2}$$
$$y = \frac{u-v}{2}$$

el Jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 1/2$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= |J| f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{(u+v)^2}{2\cdot 2^2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(u-v)^2}{2\cdot 2^2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{2u^2+2v^2}{2\cdot 2^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{u^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{v^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-\frac{u^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{v^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{e^{-\frac{u^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}\frac{e^{-\frac{v^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi\cdot 2}} \\
\Rightarrow f_{U,V}(u,v) &= N(0,2)\times N(0,2)
\end{aligned}
$$

Mostrando así lo pedido.

- **[2]** por determinar correctamente las inversas
- **[2]** por desarrollar correctamente la conjunta
- **[2]** por concluir y llegar correctamente a lo pedido
- Se asigna total del puntaje también por alguna demostración valida con otro método.
- Se asigna puntaje parcial de hasta **[3]** por algún desarrollo con sentido.