PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Ayudantía 6 - Modelos probabilísticos

1. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio muestral Ω tales que $A \subseteq B$.

   a) Discuta si la siguiente colección es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω:

   $$\mathcal{A} = \{\varnothing, A, A^c, B, B^c, A^c \cap B, A \cup B^c, \Omega\}.$$

   b) Asumiendo que $P(A) = 0.15$ y $P(A^c \cap B) = 0.05$. ¿Cuál es la probabilidad asignada al resto de los elementos de $\mathcal{A}$? ¿Son A y B eventos independientes? Discuta.

Solución:

(a) Debemos verificar las propiedades de una σ-álgebra.

Recuerde: Sea Ω un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (de subconjuntos de Ω) se denomina σ-**álgebra** si cumple las siguientes propiedades:

i. $\Omega \in \mathcal{A}$.
ii. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$. *(Cerrada bajo el complemento)*
iii. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. *(Cerrada bajo la unión de elementos)*

Notese que la primera propiedad se cumple de forma trivial, luego debemos verificar que la segunda propiedad se cumple para los elementos de $\mathcal{A}$.

- $\emptyset \in \mathcal{A} \implies \Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- $B \in \mathcal{A} \implies B^c \in \mathcal{A}$
- $(A^c \cap B) \in \mathcal{A} \implies (A^c \cap B)^c = (A \cup B^c) \in \mathcal{A}$

Luego, la propiedad ii. se cumple.

Ahora, para verificar la última propiedad debemos tener claro que $A \subseteq B$.

- $A \cup B = B \in \mathcal{A}$
- $A^c \cup A = B^c \cup B = \Omega \in \mathcal{A}$
- $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = A^c \in \mathcal{A}$

Entre más combinaciones, *como recomendación es útil realizar los diagramas de Venn para calcular* uniones e intersecciones. Luego, la última propiedad se cumple. Finalmente, $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra de sub-conjuntos de Ω.

(b)

$$\begin{aligned}
P(\emptyset) &= 0 \\
P(\Omega) &= 1 \\
P(A) &= 0.15 \\
P(A^c) &= 1 - P(A) = 0.85 \\
P(B) &= P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(A^c \cap B) \\
&= 0.2 \\
P(B^c) &= 1 - P(B) = 0.8 \\
P(A \cup B^c) &= 1 - P((A \cup B^c)^c) = 0.95
\end{aligned}$$

Luego, para verificar que A y B son eventos independientes se debe cumplir que: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) = 0.15$$
$$P(A)P(B) = (0.15) \cdot (0.2) = 0.03$$

Donde claramente $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, lo que implica que A y B no son eventos independientes.

2. Una planta de ensamblado recibe sus reguladores de voltaje de tres diferentes proveedores según la siguiente distribución: 60 % del proveedor B_1, 30 % del proveedor B_2, y 10 % del proveedor B_3. Del total de reguladores de voltaje que recibe la planta, la distribución de aquellos cuyo rendimiento corresponde a las especificaciones es: 95 % de B_1, 80 % de B_2, y 65 % de B_3.

   a) Calcule la probabilidad de que un regulador de voltaje (recibido por la planta) tenga un rendimiento conforme a las especificaciones.

   b) Calcule la probabilidad de que un regulador de voltaje específico, cuyo rendimiento corresponde a las especificaciones, provenga del tercer proveedor.

   Solución:

   (a) Definimos los siguientes eventos:
   $B :=$ *El regulador de voltaje es entregado por el i−enésimo proveedor.*
   $A :=$ *El regulador cumple con el rendimiento conforme a las especificaciones.*

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= (0.95) \cdot (0.6) + (0.8) \cdot (0.3) + (0.65) \cdot (0.1) \\ &= 0.875 \end{aligned}$$

   (b) Nos piden calcular $P(B_3|A)$, para ello debemos utilizar el teorema de bayes.

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)}$$

$$= \frac{(0.65) \cdot (0.1)}{0.875} \approx 0.074$$

3. Sea X una variable aleatoria que mide la demora que experimenta un automovilista cuando se encuentra con la señal en rojo. Suponga que X tiene función de distribución acumulada dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1-p)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

   donde $0 \leq p < 1$.

   a) Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ y $P(X > 1 \mid 2X > 1)$.

   b) Indique una mediana para la demora del automovilista.

   Solución:

   (a)

$$P(X = 0) = F_X(0) - F_X(0^-) = F_X(0) = 1 - (1-p)e^0 = p$$
$$P(X = 1) = (1 - (1-p)\exp\{-x\}) - (1 - (1-p)\exp\{-x\}) = 0$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X>1 \mid 2X>1\right) &= P\left(X>1 \mid X>\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{P\left(X>1, X>\frac{1}{2}\right)}{P\left(X>\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{P\left(X>1\right)}{P\left(X>\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1-P\left(X\leq 1\right)}{1-P\left(X\leq\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1-F_X(1)}{1-F_X(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1-(1-(1-p)\exp\{-1\})}{1-(1-(1-p)\exp\{-\frac{1}{2}\})} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

(b) Recuerde que la mediana es $F_X(m)=\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
1-(1-p)\exp\{-m\} &= \frac{1}{2} \\
(1-p)\exp\{-m\} &= \frac{1}{2} \\
m &= \ln\left(2\left(1-p\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, si $p\geq\frac{1}{2} \implies Med(X)=0$, pero si $p<\frac{1}{2} \implies m=\ln\left(2\left(1-p\right)\right)$

4. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sea $B_1, B_2, \ldots$ una partición del espacio muestral de un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Asuma que $P(B_n)>0$ para todo n. Demuestre que para cualquier evento $A\in\mathcal{A}$, se tiene que

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A\mid B_n)P(B_n).$$

b) Dada la secuencia $\{A_n\}_{n\geq 1}$ definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Demuestre las siguientes propiedades:

i. Si $P(A_n)=0$ para todo n, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0$

ii. Si $P(A_n)=1$ para algún n, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1$

Solución:

(a) Notese que $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\Omega$ y que:

$$
\begin{aligned}
A &= A\cap\Omega \\
&= A\cap\cup_{i=1}^{\infty}B_i
\end{aligned}
$$

Ahora si calculamos la probabilidad de A y utilizamos la regla del producto se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A\cap\cup_{i=1}^{\infty}B_i) \\
&= P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots) \\
&= P(\cup_{i=1}^{\infty}A\cap B_i) \qquad \text{Notese que } B_i\cap B_j=\emptyset, i\neq j \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}P(A\cap B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}P(A|B_i)P(B_i)
\end{aligned}
$$

(b) i. Notese que la desigualdad de boole se tiene que:

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$
$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

Luego, claramente se puede observar que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

ii. Notese que $A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \; \forall n \geq 1 \implies P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$; entonces para algún n se cumple que:

$$P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 1$$
$$1 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 1$$

Luego, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

5. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Determine $F_X(x)$.

Note que la fdp la podemos escribirse como

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

o equivalentemente

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces, si $x \in (-1, 0)$, entonces

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} 1 + u du = x + 1 + \frac{x^2 - 1}{2}$$

Si $x \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \leq x) \\ &= F_X(0) + P(0 < X < x) \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Luego,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x + 1 + \dfrac{x^2 - 1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$