PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Solución Ayudantía 3 - Modelos probabilísticos

1. Un software tiene la capacidad de generar letras aleatorias de la lista $\{a_1, a_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ de manera equiprobable. En la lista se tienen dos tipos de letras, a_i y p_i. Se le pide al programa que genere 7 letras con reemplazo ¿Cual es la probabilidad de que se obtengan dos letras del tipo a_i? ¿Cual es la probabilidad de que todos los caracteres sean diferentes de a_i?

   Denotemos por A el evento de interés, es decir,

   $$A = \text{salen dos letras del tipo } a_i.$$

   Entones podemos aplicar casos totales y favorables, es decir,

   $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

   Ahora hay que buscar el numerador y denominador. El denominador es fácil, pues se van a extraer 6 letras, por lo que la primera letra tiene 6 opciones de que aparezca, la siguiente letra también tiene 6 opciones, y así hasta la séptima extracción, por lo que

   $$n(A) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7.$$

   Por otro lado, el numerador requiere un poco mas de desarrollo. Nos interesa que salgan dos letras del tipo a_i; la primera tiene 2 opciones para que salga, la siguiente también tiene 2 opciones para que salga, por lo que para seccionar las dos letras a_i hay

   $$2 \cdot 2 = 2^2,$$

   opciones. Para seleccionar el resto de letras, tienen que ser del tipo p_i, bajo la misma idea que antes se tienen

   $$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5,$$

   opciones. Note que lo anterior corresponde al total de combinaciones que hay para elegir las dos letras del mismo tipo y las 5 restantes del otro tipo, pero no hemos tomado en cuenta los posibles grupos que pueden formarse, por ejemplo se tiene

   $$\underline{a_1} \quad \underline{p_3} \quad \underline{p_4} \quad \underline{p_4} \quad \underline{p_6} \quad \underline{p_5} \quad \underline{a_2} \qquad (1)$$

   $$\underline{a_1} \quad \underline{p_3} \quad \underline{p_4} \quad \underline{a_1} \quad \underline{p_4} \quad \underline{p_3} \quad \underline{p_6} \qquad (2)$$

   $$\underline{p_6} \quad \underline{p_2} \quad \underline{a_2} \quad \underline{p_3} \quad \underline{a_1} \quad \underline{p_4} \quad \underline{p_5} \qquad (3)$$

   $$\vdots$$

Esto se puede pensar de la siguiente forma, ya se generaron las 7 letras al azar con reemplazo (no se sabe las posiciones ni la forma en que salieron) y nos interesan las del tipo a_i. La primera puedo haber salido en cualquiera de las 7 posiciones, y la segunda pudo haber salido en cualquiera de las 6 posiciones restantes (las otras posiciones no nos interesan pues corresponden al tipo p_i). Ahora, ya que tenemos en consideración esto, nos falta dividir por las formas en que pueden salir el conjunto de 2 letras, es decir, si sabemos que salieron en las dos posiciones, pueden salir de cierta forma, esto se puede ver en la siguiente imagen

	p_3	p_4	p_6	p_4	p_3	
a_1	p_3	p_4	p_6	p_4	p_3	a_2
a_2	p_3	p_4	p_6	p_4	p_3	a_1

Se sabe que salieron en la primera y ultima posición, entonces en la primera opción puede salir cualquiera de las dos letras, y en la ultima solo puede salir una. Esto corresponde a

$$\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}$$

Note que esto ultimo lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} &= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{7!}{2!5!} \\ &= \frac{7!}{2!(7-2)!} \\ &= \binom{7}{2}\end{aligned}$$

Teniendo asi que

$$\begin{aligned}N(A) &= \binom{7}{2} \times (2 \cdot 2) \times (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \\ &= \binom{7}{2} 2^2 4^5\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad de que salgan dos letras del tipo a_i es

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{\binom{7}{2} 2^2 4^5}{6^7} \\ &= 0.3072702\end{aligned}$$

Note que la ultima expresión se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{\binom{7}{2}2^2 4^5}{6^7} &= \binom{7}{2}\cdot\frac{2^2}{6^2}\cdot\frac{4^5}{6^5}\\ &= \binom{7}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^5\\ &= \binom{7}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(1-\frac{2}{6}\right)^5\\ &= \binom{7}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(1-\frac{2}{6}\right)^{7-2}\end{aligned}$$

Este ultimo corresponde al modelo binomial!

Ahora definamos $A =$ todos los caracteres sean diferentes de a_i. Este evento se puede pensar en que no salga ninguna letra a_i. Procediendo de forma análoga al anterior tenemos que

$$\begin{aligned}P(A) = \frac{\binom{7}{0}2^0 4^7}{6^7} &= \binom{7}{0}\left(\frac{4}{6}\right)^7\\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^7\end{aligned}$$

2. Se lanza al aire una moneda y se pregunta cuál es la probabilidad condicionada de que aparezca cara por primera vez en la $N-$ésima tirada, sabiendo que, por lo menos, ha salido cara una vez en las $M+N$ primeras tiradas.

   Sean los eventos

   A :aparece cara por primera vez en la $N-$ésima tirada
   B :Por lo menos, ha salido cara una vez en las $M+N$ primeras tiradas

   Claramente se pide $P(A|B)$, lo que se puede calcular mediante

   $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

   Calculemos todos los terminos.

   - $P(B|A)$
     Este es el mas fácil, pues se pide la probabilidad de que por lo menos, ha salido cara una vez en las $M+N$ primeras tiradas **dado** que aparece cara por primera vez en la $N-$ésima tirada, esto significa que salió una cara en las primeras $M+N$, teniendo que

     $$P(B|A) = 1$$

   - $P(A)$
     Esto corresponde a que las primeras $N-1$ tiradas sean fallos (no salga cara) y el $N-$ésimo lanzamiento si salga cara, por lo que

     $$P(A) = \frac{1}{2^{N-1}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^N}$$

   - $P(B)$
     Esto lo podemos calcular vía complemento

     $$\begin{aligned}P(B) &= 1 - P(B^c)\\ &= 1 - P(\text{no salga cara en las primeras } M+N \text{ tiradas}\end{aligned}$$

por lo que

$$P(B) = 1 - \frac{1}{2^{M+N}}$$

pues queremos que salga sello en todas las $M+N$ tiradas.

Con todo listo, se tiene finalmente que

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2^{M+N}}}$$

3. Se realiza una encuesta para saber el porcentaje de hombres que cantan en el baño debido a que algunas personas pueden sentirse demasiado avergonzadas para admitir abiertamente que son cantantes de baño, a cada persona interrogada se le pide que lance un dado en secreto y responda NO si el número que se muestra es 1 y SI si es 6, sin importar cuál sea la verdadera respuesta, pero a decir la verdad (SI o NO) si sale 2, 3, 4 o 5. Debido a que el número mostrado no se revela, es imposible saber a partir de la respuesta dada si la persona es un cantante de baño o no. Supongamos que la probabilidad de responder SÍ en esta encuesta es 2/3. ¿Cuál es entonces la probabilidad de ser cantante de baño?

   Primero hay que organizar la información dada. Sean los siguientes eventos

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{sale 1 en el dado} \\ D_{2345} &= \text{sale el 2 o el 3 o el 4 o el 5 en el dado} \\ D_6 &= \text{sale 6 en el dado} \\ S &= \text{La persona responde que SI es cantante de baño} \\ C &= \text{La persona es un cantante de baño} \end{aligned}$$

   donde claramente $P(D_1) = P(D_6) = 1/6$ y $P(D_{2345}) = 4/6$. Note que lo pedido/solicitado es $P(C) = P(S|D_{2345})$, puesto que en esta situación la persona responde con honestidad si es o no un cantante de baño. Para esto podemos condicionar en el número del dado que aparece. Entonces

$$P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_{2345})P(D_{2345}) + P(S|D_6)P(D_6).$$

   Calculemos cada termino.

   - $P(S)$
     Por enunciado nos dicen que la probabilidad de responder que SI es un cantante de baño es $P(A) = 2/3$
   - $P(S|D_1)$
     Esto corresponde a que sea cantante de baño dado que salio el 1 en el dado, en este caso es imposible saber realmente si alguien es o no cantante de baño, pues como sale el 1 en el dado, la persona esta obligada a decir que NO, por lo que $P(S|D_1) = 0$.
   - $P(S|D_{2345})$
     No lo sabemos, pues en este caso dicen la verdad
   - $P(S|D_6)$
     Esto corresponde a siempre decir que SI, pues en el dado sale el 6, es decir, decir que SI, por lo que $P(S|D_6) = 1$.

   Con todo esto se tiene

$$\begin{aligned} 2/3 &= 0 \cdot 1/6 + P(S|D_{2345}) \cdot 4/6 + 1 \cdot 1/6 \\ \Rightarrow P(C) &= P(S|D_{2345}) = 3/4 \end{aligned}$$

   Note que la idea del ejercicio es notar que responder que SI es cantante de baño depende de cual dado aparece, pues según el número del dado se entrega cierta información.

4. Se dispone de 3 dados, D_1, D_2, D_3. El dado D_1 es equilibrado, mientras que el dado D_2 está cargado hacia los números pares, con probabilidad de que salga número par $p > 1/2$, y el dado D_3 está cargado hacia los números impares con probabilidad de que salga número par $q < 1/2$.

   El experimento consiste en elegir uno de los dados de acuerdo al siguiente mecanismo:

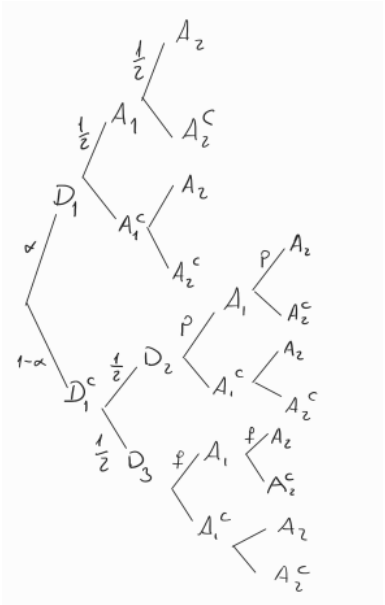
   - Se lanza una moneda no equilibrada con probabilidad de cara α.
   - Si sale cara, se selecciona el dado D_1. Si sale sello, se selecciona uno de los dados D_2 o D_3, cada uno con igual probabilidad.

   Una vez elegido el dado, éste se lanza dos veces. Dibuje un diagrama de árbol para entender el problema propuesto.

   (a) Calcule la probabilidad de que salga par en el primer lanzamiento del dado.

   (b) Calcule la probabilidad de que haya sido seleccionado el dado D_1, dado que en los dos lanzamientos se obtuvo un número par.

   (a) Sea D_i el evento "se elige el dado i" con $i \in \{1,2,3\}$ y A_j el evento "se obtiene un número par en el j-ésimo lanzamiento" con $j \in \{1,2\}$.



   Utilizando la partición dada por los D_i tenemos que

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{3} P(A_1|D_i)P(D_i)$$

   Luego, por enunciado $P(D_1) = \alpha$, $P(A_1|D_1) = 1/2$, $P(A_1|D_2) = p$ y $P(A_1|D_3) = q$.
   Así,

$$P(D_2) = P(D_1^C \cap D_2) = P(D_1^C)P(D_2|D_1^C) = (1-\alpha)1/2$$

   Igual para $P(D_3)$

$$\implies P(A_1) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot q\right).$$

   (b) Se pide $P(D_1|A_1 \cap A_2)$.

$$\begin{aligned} P(D_1|A_1 \cap A_2) &= \frac{P(D_1 \cap A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{P(D_1)P(A_1|D_1)P(A_2|A_1 \cap D_1)}{P(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{P(D_1)P(A_1|D_1)P(A_2|D_1)}{P(A_1 \cap A_2)} \end{aligned}$$

donde el numerador es

$$\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

y el denominador

$$\sum_{i=1}^{3} P(A_1 \cap A_2 | D_i) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-\alpha) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot p^2 + \frac{1}{2} \cdot q^2\right]$$

Luego,

$$P(D_1 | A_1 \cap A_2) = \frac{\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-\alpha) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot p^2 + \frac{1}{2} \cdot q^2\right]}.$$

5. Sea A, B eventos disjuntos tales que $P(A) = p$ y $P(B) = q$ con $0 < p + q < 1$. Se realiza un experimento de ensayos independientes donde cada ensayo se observa si A, B o $(A \cup B)^c$ ocurre. Encuentre la probabilidad de que ocurra el evento A antes que el evento B.

   La probabilidad de que ocurra el evento A antes que el evento B puede pasar de varias formas, pues puede ocurrir A en el primer ensayo, o puede ocurrir que A no ocurra en el primer ensayo, que B no ocurra en el segundo ensayo, pero que A si ocurra en el tercer ensayo, y así sucesivamente. Para esto definamos los siguientes eventos

   A_i = Ocurre el evento A en el $i-$esimo ensayo
   B_i = Ocurre el evento B en el $i-$esimo ensayo
   C_i = No ocurre el evento A ni el evento B en el $i-$esimo ensayo = $A_i^c \cap B_i^c$

   Nos piden

   $$P(A_1 \cup [C_1 \cap A_2] \cup [C_1 \cap C_2 \cap A_3] \cup \cdots)$$

   Ahora utilizando que son ensayos independientes y eventos disjuntos tenemos

   $$\begin{aligned} P(A_1 \cup [C_1 \cap A_2] \cup [C_1 \cap C_2 \cap A_3] \cup \cdots) &= P(A_1) + P(C_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap C_2 \cap A_3) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(C_1)P(A_2) + P(C_1)P(C_2)P(A_3) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2^c \cap B_2^c)P(A_3) + \cdots \end{aligned}$$

   Para las probabilidades $P(A_i^c \cap B_i^c)$ note que

   $$\begin{aligned} P(A_i^c \cap B_i^c) &= P([A_i \cup B_i]^c) \\ &= 1 - P(A_i \cup B_i) \\ &= 1 - [P(A_i) + P(B_j) - P(A_i \cap B_j)], \quad A, B \text{ disjuntos} \\ &= 1 - [P(A_i) + P(B_j) - 0] \\ &= 1 - p - q \\ \Rightarrow \; P(A_i^c \cap B_i^c) &= 1 - p - q \end{aligned}$$

   Ahora si reemplazamos

   $$\begin{aligned} P(A_1 \cup [C_1 \cap A_2] \cup [C_1 \cap C_2 \cap A_3] \cup \cdots) &= P(A_1) + P(C_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap C_2 \cap A_3) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(C_1)P(A_2) + P(C_1)P(C_2)P(A_3) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2^c \cap B_2^c)P(A_3) + \cdots \\ &= p + (1-p-q)p + (1-p-q)(1-p-q)p + \cdots \\ &= p + (1-p-q)p + (1-p-q)^2 p + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p-q)^n \\ &= p \frac{1}{1-(1-p-q)} \\ &= \frac{p}{p+q} \end{aligned}$$