PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Ayudantía 2 - Modelos probabilísticos

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$. Demuestre las siguientes propiedades.

   (a) $P(A^c) = 1 - P(A)$

   (b) $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

   (c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Solución:

   (a) Sea $A \cup A^c = \Omega$ y que A y A^c son disjuntos, luego:

   $$\begin{aligned} P(\Omega) = P(A \cup A^c) &= P(A) + P(A^c) \\ 1 &= P(A) + P(A^c) \\ 1 - P(A) &= P(A^c) \end{aligned}$$

   (b) Sea $B = (B \cap A^c) \cup (B \cap A)$ y $(B \cap A)$ y que $(B \cap A^c)$ son disjuntos, luego:

   $$\begin{aligned} P(B) &= P((B \cap A^c) \cup (B \cap A)) \\ P(B) &= P(B \cap A^c) + P(B \cap A) \\ P(B) - P(B \cap A) &= P(B \cap A^c) \end{aligned}$$

   (c) Sea $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$, con A y $B \cup A^c$ disjuntos, luego:

   $$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (B \cap A^c) \\ &= P(A) + P(B \cap A^c) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

2. Se ha realizado una encuesta entre los estudiantes de grado del MIT (Massachusetts Institute of Technology) para conocer sus preferencias tecnologicas. El 35% de los entrevistados tienen un iPhone y un IPad, el 80% tienen al menos uno de estos dispositivos y el 60% no tiene iPad. Se elige un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que:

   (a) Disponga de iPhone y no de iPad.

   (b) Tenga un iPad, pero no un iPhone.

   (c) Tenga unicamente uno de los dos dispositivos.

   (d) No Disponga de ninguno de los dos dispositivos.

   Solución:

   Primero debemos definir los eventos:

   $$A := \text{"El estudiante tiene iPhone"}$$
   $$B := \text{"El estudiante tiene iPad"}$$

(a) Como se nos pide calcular la probabilidad de que un estudiante tenga iPhone y no tenga iPad, debemos calcular $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$. Sin embargo, no se conoce $P(A)$. En cambio, sabemos que el 80% de los estudiantes tiene iPhone o iPad, es decir, $P(A \cup B) = 80\%$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) &= P(A) \\ 80\% - 40\% + 35\% &= P(A) \\ 75\% &= P(A) \end{aligned}$$

Con $P(A) = 75\%$, luego:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= 75\% - 35\% \\ &= 40\% \end{aligned}$$

(b) Nos piden calcular que un estudiante tenga iPad y no iPhone, sabemos que con un 40% un estudiante tiene iPad.

$$\begin{aligned} P(B \cap A^c) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= 40\% - 35\% \\ &= 5\% \end{aligned}$$

(c) Debemos calcular la probabilidad de que un estudiante tenga iPhone y no iPad, o que no tenga iPhone y sí iPad (*Ambos eventos son disjuntos*).

$$\begin{aligned} P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \\ &= 40\% + 5\% \\ &= 5\% \end{aligned}$$

(d) El ultimo evento simplemente debemos calcular:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^C) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 80\% \\ &= 20\% \end{aligned}$$

3. Una caja contiene r bolas rojas y b bolas blancas, con $r, b \in \mathbb{N}$ y $N := r + b$. Las extracciones se realizan *sin reemplazo* y todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Consideremos un número de extracciones m con $0 \leq m \leq N$. Además asumimos $k < r$ y $l < b$ según el caso que se considere.

   Calcular las siguientes probabilidades:

   (a) La probabilidad de que, en m extracciones, exactamente k de las bolas extraídas sean rojas.

   (b) La probabilidad de que en las primeras k extracciones todas sean rojas y en las siguientes l extracciones todas sean blancas (es decir, un bloque de k rojas seguido de un bloque de l blancas), con $k + l < N$.

   Solución:

   (a) Notemos que se trata de un conteo sin reposición y donde el orden no importa. Por lo tanto, cada subconjunto de m bolas es igualmente probable, y podemos usar la definición de combinatoria para contar los casos favorables.

Elegimos k bolas rojas de las r disponibles en $\binom{r}{k}$ formas; luego, de las $m-k$ extracciones restantes, solo debemos obtener bolas blancas, lo cual puede hacerse en $\binom{b}{m-k}$ formas. Teniendo que los casos favorables están dados por:

$$\binom{r}{k}\binom{b}{m-k}$$

Y el total de los casos disponibles esta dado por $\binom{N}{m}$. Por ende, la probabilidad de que en m extracciones obtengamos exactamente k bolas rojas esta dado por:

$$P(\text{“exactamente } k \text{ rojas en } m \text{ extracciones”}) = \frac{P(\text{“casos favorables”})}{P(\text{“casos totales”})} = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

La anterior fórmula corresponde a la distribución hipergeométrica, que da la probabilidad de obtener exactamente k éxitos en m extracciones sin reemplazo de una población finita.

(b) Notese que se trata de un conteo sin reposición y con orden, dado que primero debemos obtener las bolas rojas y luego las bolas azules.

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots R_k \cap B_{k+1} \cap B_{k+2} \cap \ldots B_{k+l}) &= \frac{r}{N} \cdot \frac{r-1}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{r-(k-1)}{N-(k-1)} \cdot \frac{b}{N-k} \cdot \frac{b-1}{N-k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{b-(l-1)}{N-(k+l-1)} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r-i}{N-i} \cdot \prod_{i=0}^{l-1} \frac{b-i}{N-(k+i)} \\ &= \frac{(r)_k \cdot (b)_l}{(N)_{k+r}} \end{aligned}$$

$(r)_k$, $(b)_l$ y $(N)_{r+k}$ es conocido como el factorial descendente

4. Una mano de póker consiste en cinco cartas seleccionadas sin reemplazo de una baraja de 52 (sin comodines). Determine la probabilidad de obtener las siguientes combinaciones:

   (a) Escalera de color: las cinco cartas consecutivas y del mismo palo. (A *puede actuar tanto como la carta menor como la mayor.*)

   (b) Escalera de color real: (10, J, Q, K, A) y del mismo palo.

   (c) Póker: cuatro cartas con la misma numeración.

Solución:



Figure 1: Ejemplo de una mano de Póker

(a) Notemos que se trata de un muestreo ordenado y sin reposición. Si consideramos todas las secuencias posibles de extracciones, una carta A puede aparecer como el valor más alto o el más bajo, y cada secuencia es igualmente probable. Se tiene que:

$$(A, 2, 3, 4, 5)$$
$$(2, 3, 4, 5, 6)$$
$$(3, 4, 5, 6, 7)$$
$$(4, 5, 6, 7, 8)$$
$$(5, 6, 7, 8, 9)$$
$$(6, 7, 8, 9, 10)$$
$$(7, 8, 9, 10, J)$$
$$(8, 9, 10, J, Q)$$
$$(9, 10, J, Q, K)$$
$$(10, J, Q, K, A)$$

Consideremos que la escalera de color:

- Tiene 4 palos distintos (Corazón, Diamante, Trébol y Pica), cada uno con 13 cartas.
- Como hay 4 palos, el total de escaleras de color posibles es $10 \cdot 4 = 40$.
- El total de combinaciones de 5 cartas de 52 es $\binom{52}{5}$.

Por lo tanto, la probabilidad de obtener una escalera de color es:

$$P(\text{escalera de color}) = \frac{40}{\binom{52}{5}}.$$

(b) Notemos que por palo hay solo una opción en que se tenga la secuencia (10; J; Q; K; A), pues es única. Y como son 4 palos, tenemos solo 4 formas de obtener esta combinación. Luego, la probabilidad pedida es:

$$P(\text{escalera de real}) = \frac{4}{\binom{52}{5}}.$$

(c)

$$(A\heartsuit,\ A\diamondsuit,\ A\clubsuit,\ A\spadesuit)$$
$$(2\heartsuit,\ 2\diamondsuit,\ 2\clubsuit,\ 2\spadesuit)$$
$$(3\heartsuit,\ 3\diamondsuit,\ 3\clubsuit,\ 3\spadesuit)$$
$$\vdots$$
$$(Q\heartsuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\clubsuit,\ Q\spadesuit)$$
$$(K\heartsuit,\ K\diamondsuit,\ K\clubsuit,\ K\spadesuit)$$

Notemos que hay 13 formas posibles de obtener 4 cartas con la misma numeración, y dado que ya extrajimos 4 cartas, la ultima carta tiene 48 opciones distintas. Por ende, la probabilidad de un póker esta dada por:

$$P(\text{póker}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$