PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Solución Ayudantía 9 - Modelos probabilísticos

1. Sea X una v.a aleatoria con fgm dada por

$$M_X(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

(a) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y determine la distribución de X.

(b) Defina la v.a $Y = aX$. Determine $M_Y(t)$

(c) Defina la v.a $Z = -\log(X)$. Determine la distribución de Z. Para esto, puede primero calcular la fgm de una exponencial de parámetro λ. Corrobore esto determinando la densidad de Z.

(a) Derivamos y evaluamos en cero la fgm.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt}\frac{e^t-1}{t}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Para esto podemos tomar limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{te^t - e^t + 1}{t^2} = \frac{0}{0}$$

usamos L'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{te^t - e^t + 1}{t^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{te^t}{2t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) Usamos la definición

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\ &= \mathbb{E}[e^{taX}] \\ &= \mathbb{E}[e^{(ta)X}] \\ &= M_X(at) \\ &= \frac{e^{at}-1}{at}\end{aligned}$$

(c) La fgm de una exponencial de parámetro λ, digamos $W \sim Exp(\lambda)$ está dada por

$$\begin{aligned} M_W(t) &= \mathbb{E}(e^{tW}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{tw}\lambda e^{-w\lambda} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \lambda e^{-w(\lambda - t)} dw \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

para $\lambda > t$. Entonces

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ}) \\ &= \mathbb{E}(e^{t\cdot -ln(X)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{ln(1/X^t)}) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{X^t}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^t} dx \\ &= \frac{x^{-t+1}}{-t+1}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

Esto pues $X \sim U(0,1)$. Ahora, esta ultima es la fgm de una exponencial de parámetro $\lambda = 1$, por lo que $Z \sim Exp(1)$.

Buscamos la densidad

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(-ln(X) \leq z) \\ &= P(ln(X) \geq -z) \\ &= P(X \geq e^{-z}) \\ &= 1 - P(X < e^{-z}) \\ F_Z(z) &= \qquad\qquad\qquad\qquad = 1 - F_X(e^{-z}) \\ f_Z(z) &= e^{-z} f_X(e^{-z}) \\ &= e^{-z} \end{aligned}$$

para determinar el recorrido, tenemos que $X \in (0,1)$, pues $X \sim U(0,1)$. Evaluamos en los extremos

$$\begin{aligned} -ln(1) &= 0 \\ -ln(0^+) &= \infty \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{Z} = (0, \infty)$. Teniendo asi que

$$f_Z(z) = e^{-z}, \quad z > 0$$

donde claramente es la densidad de una exponencial de parmaetro $\lambda = 1$.

2. Sea X una variable aleatoria con $M_X(t)$ definida en $|t| < h$. Pruebe que

(a) $P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (0, h)$.

(b) $P(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (-h, 0)$.

(a) Vamos a usar la desigualdad de Markov, que dice que para cualquier variable aleatoria X y cualquier función positiva $g(X)$, se tiene que

$$P(g(X) \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{c}, \quad c > 0.$$

Tomamos $g(X) = e^{tX}$, con $t > 0$ y aplicamos la desigualdad de Markov:

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P(e^{tX} \geq e^{ta}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} \\ &= \frac{M_X(t)}{e^{ta}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t), \quad \text{para } t \in (0, h).$$

(b) De manera similar, aplicamos la desigualdad de Markov, pero esta vez con $t < 0$. Tomamos nuevamente $g(X) = e^{tX}$, y usamos la desigualdad de Markov:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(e^{tX} \geq e^{ta}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} \\ &= \frac{M_X(t)}{e^{ta}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$P(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t), \quad \text{para } t \in (-h, 0).$$

3. Para los siguientes casos determine la fdp o fmp de la transformación respectiva

(a) $X \sim Beta(a, 1), Y = -ln(X)$

(b) $X \sim P(\lambda), Y = e^X$

(c) $X \sim Cauchy(0, 1), Y = |X|$

(a) La fdp de X está dada por

$$f_X(x) = ax^{a-1}, \quad 0 < x < 1$$

entonces

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(-ln(X) \leq y) \\ &= P(ln(X) \geq -y) \\ &= P(X \geq e^{-y}) \\ &= 1 - P(X < e^{-y}) \\ F_Y(y) &= 1 - F_X(e^{-y}) \\ f_Y(y) &= e^{-y} f_X(e^{-y}) \\ &= e^{-y} a (e^{-y})^{a-1} \\ &= a e^{-y} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = a e^{-ay}, \quad y > 0$$

Teniendo así que $Y \sim Exp(a)$.

(b) En este caso como es discreta el procedimiento es diferente. Primero determinemos el recorrido de Y. Recordemos que $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, ...\}$. Entonces

$$\begin{aligned} y &= e^0 = 1 \\ y &= e^1 = e \\ y &= e^2 = e^2 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

se deduce que $\mathcal{Y} = \{1, e, e^2, ...\}$. Por otro lado, la inversa es

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ \Rightarrow x &= ln(y) \end{aligned}$$

por lo que

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^{ln(y)} e^{-\lambda}}{[ln(x)]!}, \quad y = 1, e, e^2, ...$$

(c) En este caso se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= P(X \leq y) - P(X \leq -y) \\ F_Y(y) &= F_(y) - F(-y) \\ f_Y(y) &= f_Y(y) + f_(- y) \\ &= \frac{1}{\pi(1+y^2)} + \frac{1}{\pi(1+(-y)^2)} \\ &= \frac{2}{\pi(1+y^2)} \end{aligned}$$

Ahora el recorrido. Para esto es fácil ver que la función $y = |x|$ mapea a valores positivos, por lo que $\mathcal{Y} = (0, \infty)$. Luego,

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi(1+y^2)}, \quad y > 0$$

4. Se dice que X tiene distribución normal con parámetro μ y σ^2, denotado por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su fdp está dada por

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$, y fgm dada por $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

(a) Si $X \sim N(0,1)$. Determine la distribución de $Y = \sigma X + \mu$

(b) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ determine a tal que $P(X \leq a) = 0.5$

(c) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ calcule $P(X > \sigma | X > -2)$

(d) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ muestre que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(X > \sigma x + \mu)}{\varphi(x)/x} = 1$$

con $\varphi(x)$ la densidad de una normal estándar.

(a) Se tiene

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(\sigma X + \mu \leq y) \\
&= P\left(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\
F_Y(y) &= F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\
f_Y(y) &= \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma} \frac{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}
\end{aligned}$$

Claramente el recorrido es $\mathbb{R}$. Luego,

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es decir, $Y \sim N(\mu, \sigma)$. Otra forma es utilizar fgm pues

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\
&= \mathbb{E}(e^{t(\sigma X + \mu)}) \\
&= e^{t\mu}\mathbb{E}(e^{t\sigma X}) \\
&= e^{t\mu}\mathbb{E}(e^{(t\sigma)X}) \\
&= e^{t\mu} M_X(\sigma t) \\
&= e^{t\mu} e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} \\
&= e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}
\end{aligned}$$

y esta ultima es la fgm de una normal.

(b) Usando la acumulada de la normal y estandarizando se tiene

$$\begin{aligned}
P(X \leq a) &= 0.5 \\
P\left(X - \mu \leq a - \mu\right) &= 0.5 \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) &= 0.5 \\
P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) &= 0.5, \quad Z \sim N(0,1) \\
\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) &= 0.5 \\
\frac{a-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0.5) \\
\Rightarrow \; a &= \sigma\Phi^{-1}(0.5) + \mu \\
a &= 0 + \mu \\
a &= \mu
\end{aligned}$$

(c) Recordando que $\sigma > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
P(X > \sigma | X > -2) &= \frac{P(X > \sigma, X > -2)}{P(X > -2)} \\
&= \frac{P(X > \sigma)}{P(X > -2)} \\
&= \frac{1 - P(X < \sigma)}{1 - P(X < -2)} \\
&= \frac{1 - \Phi\left(\frac{\sigma-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{-2-\mu}{\sigma}\right)}
\end{aligned}$$

(d) Primero calculemos la probabilidad del numerador

$$\begin{aligned}
P\left(X > \sigma x + \mu\right) &= 1 - P\left(X < \sigma x + \mu\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\sigma x + \mu - \mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi(x)
\end{aligned}$$

entonces el limite queda como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)}$$

Si evaluamos se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} = \infty(1-1) = \infty \cdot 0$$

pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2\pi} x e^{x^2/2}(1-\Phi(x)) = \infty \cdot 0$$

Entonces podemos usar L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)/x} \\
&\underset{=}{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{-\varphi(x)}{\frac{\varphi(x)'x-\varphi(x)}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Recuerde que

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\varphi'(x) = -x\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = -x\varphi(x)$$