PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

# Ayudantía 12 - Modelos probabilísticos

1. Suponga que el ancho ($X$) y el largo ($Y$) de una placa rectangular son variables aleatorias con función densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{si } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   (a) Calcule el ancho esperado y el largo esperado de la placa.

   (b) Calcule el área esperada de la placa.

   (c) Calcule la esperanza y varianza del perímetro de la placa.

   (a) Notese que nos piden calcular $E(X)$ y $E(Y)$. Primero debemos encontrar las distribuciones marginales de $X$ e $Y$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^1 8xy\, dy \\ &= 8x \int_x^1 y\, dy \\ &= 4x(1-x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 8xy\, dx \\ &= 8y \int_0^y x\, dx \\ &= 4y^3 \end{aligned}$$

   Ahora para calcular las esperanzas, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x(4x(1-x^2))\, dx \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 y(4y^3)\, dy \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

(b) Nos piden calcular el área esperada de la placa, lo que se traduce en calcular $E(XY)$.

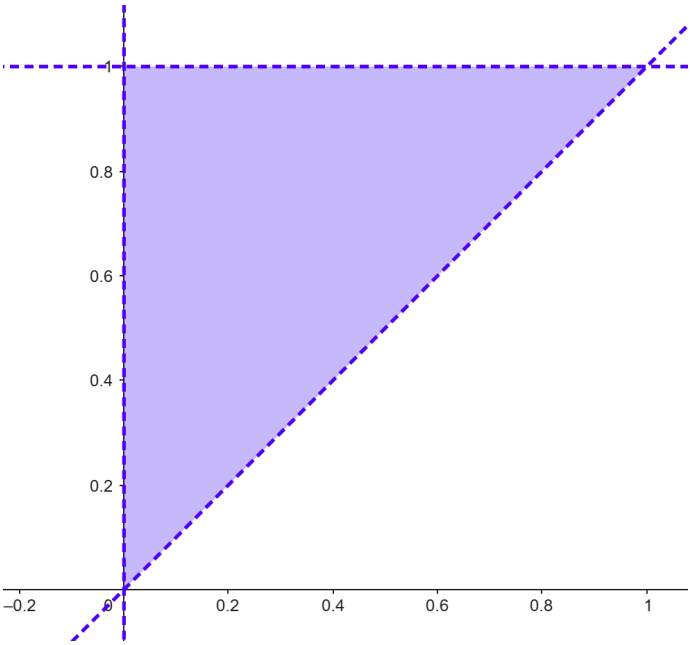



Figure 1: Área de la región $0 < x < y < 1$

Con la figura anterior podemos observar que $X$ se mueve en los valores de $(0,1)$, en cambio $Y$ se mueve entre $(x,1)$. Luego, la esperanza del área de la placa es:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_x^1 xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dydx \\ &= 8\int_0^1 x^2 \int_x^1 y^2\, dydx \\ &= 8\int_0^1 x^2 \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=x}^1\right) dx \\ &= 8\int_0^1 \frac{x^2}{3} - \frac{x^5}{3}\, dx \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

(c) Recordar que el perímetro es la suma de los lados de la placa rectangular. Por lo tanto, debemos calcular:

$$E(2(X+Y)) \text{ y } Var(2(X+Y)).$$

$$\begin{aligned} E(2(X+Y)) &= 2(E(X)+E(Y)) \\ &= 2\left(\frac{8}{15}+\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(2(X+Y)) &= E((2(X+Y))^2) - E(2(X+Y))^2 \\ &= E((2(X+Y))^2) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

donde:

$$E((2(X+Y))^2) = \int_0^1 \int_x^1 4(x+y)^2 \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dydx = \frac{68}{9}$$

luego, $Var(2(X+Y)) = \frac{68}{9} - \frac{64}{9} = \frac{4}{9}$

2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$, determine la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.Recuerde que la función generadora de momentos de $X_i$ es $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ con $t < \lambda$. Sin embargo, primero demuestre que si $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} M(t)$ y $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $M_Y(t) = \{M(t)\}^n$.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tX_1 + \ldots + tX_n}\right) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} e^{tX_1 + \ldots + tX_n} f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1 \end{aligned}$$

Note que las variables son independientes, por lo que $f_{X_1, \ldots X_N}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$

$$= \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} e^{tX_1} \cdots e^{tX_n} f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$

Reordenando la expresión obtenemos,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{X}} e^{tX_1} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{\mathcal{X}} e^{tX_n} f_{X_n}(x_n)\, dx_n \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \mathbb{E}\left(e^{tX_2}\right) \cdots \mathbb{E}\left(e^{tX_{n-1}}\right) \mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right) \\ &= M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \end{aligned}$$

Como las variables son idénticamente distribuidas, por lo tanto todas tienen la misma generadora de momentos, esto se traduce en:

$$= \prod_{i=1}^{n} M_x(t) = (M_X(t))^n$$

Ahora, solamente debemos aplicar la formula.

$$M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

Luego, se puede observar que la FGM anterior corresponde a la FGM de la distribución Gamma, por lo que $Y \sim \Gamma(n, \lambda)$. Aunque esta distribución también es conocida como la distribución de Erlang, utilizada para medir el tiempo de espera hasta que ocurra el suceso $n$ en un proceso poisson.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Normal(\mu, \sigma^2)$, determine la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, para ello puede usar el resultado anterior. Recuerde que la función generadora de momentos de la distribución normal es $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

$$M_Y(t) = \left(e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right)^n$$

$$= \left(e^{(n\mu)t + \frac{(n\sigma^2)t^2}{2}}\right)$$

Luego, $Y \sim Normal(n\mu, n\sigma^2)$.

4. Sean $U = X + Y$ y $V = X - Y$, donde $X$ e $Y$ son variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Obtenga el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas del vector $\mathbf{Z} = (U, V)^\top$.

Primero note que $E(X) = E(Y) = \mu$, $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$ y $Cov(X, Y) = 0$ por independencia. Además, $E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2 + \mu^2$. Ahora el vector de medias es:

$$E(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X+Y) \\ E(X-Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X)+E(Y) \\ E(X)-E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la matriz de varianzas-covarianzas es:

$$Var(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} Var(U) & Cov(U,V) \\ Cov(V,U) & Var(V) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} Var(U) &= Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) = 2\sigma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(V) &= Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) = 2\sigma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(U,V) &= E\{(X+Y)(X-Y)\} - E(X+Y)E(X-Y) \\ &= E\{(X+Y)(X-Y)\} \quad \text{pues } E(X-Y) = 0 \\ &= E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = 0, \quad \text{ya que } E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2 + \mu^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad Var(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 \end{pmatrix}.$$