Departamento de Estadística PUC

Ejercicios Ex.: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: R. Arellano

Ejercicio 1: Sean $X_1, ..., X_n$, n variables aleatorias independientes cada una con distribución Exp(λ).
(a) Encuentre las fd marginales de $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $X_{(n)} = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$.
(b) Obtenga la fd conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$.
(c) Determine la f.d de $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ e indique su valor esperado.
(d) Sea $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Obtenga la distribución condicional de $T|X_1 = x_1$, y con éste resultado encuentre la distribución condicional de $X_1|T = t$. (*Hint: Note que* $Z = X_1 + Z$, *donde* $X_1 \sim \exp(\lambda)$ *y* $Z = \sum_{i=2}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n-1, \lambda)$ *y son independientes. Luego, pruebe que*

$$f_{T|X_1=x_1}(t) = \begin{cases} f_Z(t - x_1) & \textit{si } t > x_1 > 0, \\ 0, & \textit{eoc.} \end{cases}$$

Ejercicio 2: Considere la siguiente distribución de probabilidades del vector aleatorio (X, Y):

$y \backslash x$	1	2	3
2	0.1	0.2	0.1
4	0.1	0.2	0.3

(a) Encuentre las distribución marginal de X y la distribución condicional de Y dado $X = x$ para cada $x = 1, 2, 3$.
(b) Pruebe que $\text{P}(Y = y) = \text{E}\{P(Y = y \mid X)\}$ para cada $y = 2, 4$.
(c) Calcule $\text{E}(Y|X = x)$ y $\text{Var}(Y|X = x)$ para cada valor posible de x.
(d) Calcule $\text{E}(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.
(e) Verifique las relaciones: $E(Y) = \sum_{x=1}^{3} E(Y|X = x)p_X(x)$ y $Var(Y) = \sum_{x=1}^{3}(x - E(Y|X = x))^2 p_X(x) + \sum_{x=1}^{3}(E(Y|X = x) - E(Y))^2 p_X(x)$.

Ejercicio 3: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes cada una con distribución normal estándar. Sean $Y_1 = X_1$ e $Y_2 = X_1 + X_2$.
(a) Encuentre la distribución conjunta de Y_1 e Y_2, y pruebe que $Y_2|Y_1 = y_1 \sim N(y_1, 1)$.
(b) Muestre $Y_2 \sim N(0, 2)$. Verifique que $E(Y_2) = E\{E(Y_2|X_1)\}$ y $Var(Y_2) = Var\{E(Y2|X_1)\} + E\{Var(Y_2|X_1)\}$.
(c) Encuentre la distribución condicional de $Y_1|Y_2 = y_2$ e indique su media y su varianza.

Ejercicio 4: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fd dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24x^2/y^3, & 0 < x < 1,\ y > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que X e Y son variables aleatorias independientes.
(a) Calcule $E(XY)$ y $P(XY > 1)$.
(b) Encuentre la fd conjunta de $U = X$ y $V = XY$, y la fd condicional de V dado $U = u$.
(c) Calcule $\mathrm{E}(V|U = u)$. ¿Qué puede sobre la existencia de $\mathrm{Var}(V|U = u)$? Discuta.

Ejercicio 5: Sean X_1 y X_2 va con fd conjunta dada por:

$$p(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{36}, & x_1 = 1,2,3;\ x_2 = 1,2,3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre la fp conjunta de $Y_1 = X_1X_2$ e $Y_2 = X_2$.
(b) Encuentre la fp marginal de Y_1 e indique su media y su varianza.
(c) Encuentre la fp condicional de Y_2 dado $Y_1 = y_1$ e indique su media y su varianza para cada valor posible de y_1.
(d) Muestre que $\mathrm{E}(Y_2) = \mathrm{E}\{\mathrm{E}(Y_2|Y_1)\}$.

Ejercicio 6: Sean X, Y y Z variables aleatopirias con fd conjunta

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 8xyz, & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < Y < Z)$.
(b] Encuentre las distribuciones de $U = \text{máx}\{X, Y, Z\}$ y $V = \text{mín}\{X, Y, Z\}$.
(c) Calcule $E(U - V)$ y discuta sobre el calculo de $Var(U - V)$.

Ejercicio 7: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes cada una con la misma densidad, digamos:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^4, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

(a) Encuentre el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas de (X_1, X_2, X_3).
(b) Encuentre la fd condicional de (X_1, X_2) dado $X_3 = x_3$.
(b) Encuentre la fd y la función de distribución de $Y = \text{máx}\{X_1, X_2, X_3\}$.

Ejercicio 8: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Encuentre la distribución condicional X_2 dado $X_1 + X_2 = x$ e indique su media y su varianza para cada valor posible de x.

Ejercicio 9: Sea X e Y variables aleatorias tales que $Y \mid X = x \sim Poisson(x)$ y $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$. Obtenga la distribución condicional de X dado $Y = y$ e indique su media y su varianza.

Ejercicio 10: Sea X y Y variables aleatorias tales que $Y \mid X = x \sim Bin(x, p)$ y $X \sim Poisson(\lambda)$. Pruebe que $Y \sim Poisson(\lambda p)$.

Ejercicio 11: Sean X e Y variables aleatorias reales definidas en un mismo espacio de probabilidad, y h una función real valorada tal que $h(Y)$ sea una variable aleatoria. Si $E\{h(Y)\}$ existe, muestre que $E\{h(Y)\} = E\{E(h(Y)|X)\}$.

Ejercicio 12: Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ un vector aleatorio con distribución normal bivariada con vector de medias $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ y matriz de varianzas-covarianzass $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$, para $i, j = 1, 2$.
(a) Escriba la fd y la fgm del vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$.
(b) Indique las distribuciones marginales.
(c) Pruebe que $X_2|X_1 = x_1 \sim N(\mu_{2\cdot1}, \sigma^2_{2\cdot1})$, donde $\mu_{2\cdot1} = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(x_1 - \mu_1)$ es la función de regresión de X_2 dado $X_1 = x_1$ y $\sigma^2_{2\cdot1} = \sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}$ es la respectiva varianza condicional, la cual no depende de x_1.
(c) Intente extender el resultado en (c) al caso de la distribución normal multivariada $N_n(\mu, \Sigma)$.

Ejercicio 13: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fd dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre la distribución condicional de Y dado $X = x$.
(b) Encuentre la función de regresión Y sobre X.
(c) Muestre que la varianza de Y dado $X = x$ no depende de x.

Ejercicio 14: El número de clientes que llegan a un supermercado en una hora hábil es una variable aleatoria con media 100 y desviación estándar 20. Cada cliente, independiente de los otros, gasta una cantidad aleatoria de dinero con media \$100 y desviación estándar \$50. Encuentre la media y la desviación estándar de la cantidad de dinero gastado durante una hora hábil.

Ejercicio 15: Sean $N, X_1, X2, \ldots$ variables aleqatorias indpendientes, donde $N \sim Poisson(\lambda)$ y $X_1, X_2, \ldots$ son iid $U(0, \theta)$.
(a) Sea $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Calcule E(Y) y Var(Y).
(b) Sean $Y = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_N\}$ y $Z = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_N\}$. Encuentre la media y varianza de Y y Z. ¿Es posible calcular sus varianzas? Discuta.

Ejercicio 16: Sean X_1, X_2,..., X_n variables aleatorias independientes cada una con distribución chicuadrado con un grado de libertad, entonces $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(n)$. Sea $Z_n = (Y - n)/\sqrt{2n}$, para $n \geq 1$. Pruebe que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, con $Z \sim N(0, 1)$.

Ejercicio 27: Suponga que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias iid con distribución Bernoulli$(1, 0.4)$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
(a) Determine un valor aproximado para $P(S_{100} = 50)$.
(b) Pruebe que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 0.4$.

Ejercicio 17: Suponga que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias iid con distribución Poisson con parámetro $\lambda = 0.003$. Sea $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$.
(a) Calcule aproximadamente $P(\bar{X}_{100} \geq 0.04)$.
(b) Muestre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 0.003$.

Ejercicio 18: Suponga que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias iid con distribución $U(0, 1)$ e $Y_n =$ Máximo$\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Muestre que $n(1 - Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, donde $Y \sim$ Exp(1).

Ejercicio 28: Sea $X \sim P(\lambda)$. La fgm de X está dada por:

$$M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

(a) Sea $Y = (X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$. Muestre que $M_Y(t) = e^{-t\sqrt{\lambda}} M_X(t/\sqrt{\lambda})$.
(b) Muestre que $\log M_Y(t) = -t\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3!\lambda^{3/2}} + ...$; y que $\log M_Y(t) \to \dfrac{t^2}{2}$ cuando $\lambda \to \infty$. O sea $M_Y(t) \to e^{t^2/2}$ cuando $\lambda \to \infty$.
(c) Muestre que $Y \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, donde $Z \sim N(0, 1)$ cuando $\lambda \to \infty$.