Departamento de Estadística PUC

Ejercicios 4: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: R. Arellano

Ejercicio 1: Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) Exp(λ) ($\lambda > 0$), es decir, con fdp

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, \lambda)$ usando función generadora de momentos (fgm) e inducción matemática.
(b) Suponga $n = 2$. Obtenga $E(X_1 + X_2)$ y $Var(X_1 + X_2)$.
(c) Pruebe que $E\left(\dfrac{X_1}{X_1 + X_2}\right) = \dfrac{1}{2}$. (*Hint: Usando el cambio de variables* $y = x_1/(x_1 + x_2)$ *y* $z = x_1 + x_2$*, pruebe que* $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x_1}{x_1+x_2} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 = \int_0^1 y \int_0^\infty \lambda^2 z e^{-\lambda z} dz dy$.)
(d) Calcule la covarianza entre $\dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ y $X_1 + X_2$.
(e) Obtenga la función de densidad conjunta de $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ e $Y_2 = X_1 + X_2$. Estudie si las nuevas variables son independientes.
(f) Repita el item (e) asumiendo que $X_1 \sim Gamma(\alpha_1, \lambda)$ y $X_2 \sim Gama(\alpha_2, \lambda)$ son independientes. En tal caso, concluya que $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$ e $Y_2 = X_1 + X_2 \sim Gama(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ y que son independientes. Con este resultado y notando que $Y_1 Y_2 = X_1$, encuentre $E(Y_1)$.

Ejercicio 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes ?
(a) Encuentre el valor esperado, la varianza y la fgm de $Z = (X + Y)/2$.
(b) Encuentre el valor esperado de XY.
(c) Considere la transformación $Z = \text{máx}\{X, Y\}$. Obtenga la distribución de Z. (*Hint: Use que* $F_Z(z) = P(X \leq z, Y \leq z)$)
(d) Repita (c) para la transformación $Z = \text{mín}\{X, Y\}$. (*Hint: Use que* $F_Z(z) = 1 - P(X > z, Y > z)$).
(e) En (c) y (d) indique $E(Z)$.

Ejercicio 3: Considere la siguiente distribución de probabilidades del vector aleatorio (X, Y):

$y\backslash x$	1	2	3
2	0.1	0.2	0.1
4	0.1	0.2	0.3

(a) Encuentre las distribuciones marginales de X y de Y.
(b) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes ?
(c) Encuentre la media, la varianza y la covarianza de dichas variables.

Ejercicio 4: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes cada una con distribución normal estándar. Sean $Y_1 = X_1$ e $Y_2 = X_1 + X_2$.
(a) Encuentre la fgm conjunta de Y_1 e Y_2.
(b) Muestre $Y_2 \sim N(0, 2)$.
(c) Encuentre la función de densidad conjunta de Y_1 e Y_2, y obtenga la función de densidad marginal de Y_2.
(d) Encuentre la función de densidad conjunta de la transformación $Y_1 = (X_1 + X_2)/2$ e $Y_2 = (X_1 - X_2)^2/2$.
(f) En (d), pruebe que Y_1 e Y_2 son varaibles aleatorias independientes, con distribuciones marginales dadas por $Y_1 \sim N(0, 1/2)$ e $Y_2 \sim \chi^2_1$.

Ejercicio 5: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad -\infty < x, y < \infty$$

(a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes ?
(b) Pruebe que $D = X - Y \sim N(0, 2)$.
(c) Calcule $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$.
(d) Obtenga la fgm conjunta de (X, Y) y luego la la fgm conjunta de $(X + Y, X - Y)$. ¿Se puede afirmar que las variables aleatorias $X + Y$ y $X - Y$ son independientes ?
(f) Repita (d) a partir de la función de densidad conjunta de la transformación de $U = X + Y$ y $V = X - Y$. ¿Son $S = U/2$ y $T = V^2/2$ variables aleatorias indpendientes?

Ejercicio 6: Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con f.d. dada por:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1, x_2 < 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

(a) Encuentre las f.d. marginales de X_1 y de X_2 y sus primeros y segundos mementos.
(b) ¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias independientes ?
(c) Sea $Y_1 = X_1/X_2$ e $Y_2 = X_1X_2$. Encuentre la covarianza entre Y_1 e Y_2.
(d) En (c), obtenga la función de densidad conjunta de Y_1 e Y_2, e indique sus marginales. ¿Se cumple que $E(Y_1) = E(X_1^2)$?

Ejercicio 7: Sea (X, Y) un vector aleatorio con f.d. dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24x^2/y^3, & 0 < x < 1,\ y > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < 1/2 \mid Y > 6)$.
(b) Encuentre las funciones de densidad marginales de X e Y.
(c) Calcule $\rho_{XY} = \text{Correlación}(X, Y)$.

Ejercicio 8: Si

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 8xyz, & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < Y < Z)$.
(b) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?
(c) Encuentre la función de densidad conjunta de $U = XY$ y $V = Z$. ¿Son U y V variables aleatorias independientes?

Ejercicio 9: Sea (X, Y) un vector aleatorio con f.d. dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes ?
(b) Encuentre la media, la varianza y la covarianza de dichas variables.

Ejercicio 10: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias iid con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^4, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) ¿Son X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes ?
(b) Encuentre la media, la varianza y la covarianza de dichas variables.

Ejercicio 11: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Use fgm para probar que $X_1+X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$. Repita el ejercicio a partir de la función de propbailiadad conjunta de X_1 y X_2.

Ejercicio 12: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes cada una con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Sean $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.
(a) Encuentre la media, la varianza y la covarianza de dichas variables.
(b) Encuentre la fgm conjunta de Y_1 e Y_2.
(c) ¿Son Y_1 e Y_2 variables aleatorias independientes ?

(d) ¿Son $U_1 = Y_1/2$ e $U_2 = Y_2^2/2$ variables aleatorias independientes ?
(e) Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias iid $N(\mu, \sigma^2)$. Pruebe que la media muestral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. En este caso, también se puede probar que para $n \geq 2$, la varianza muestral $S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, es tal que $(n-1)S \sim \chi^2_{n-1}$, y que es independiente de la media muestral $\bar{X}$.

Ejercicio 13: Sea (X, Y) un vector aleatorio con f.d. dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq y < x < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < 2, Y > 1)$, $P(X > 2Y)$ y $P(X - Y \geq 1)$.
(b) Obtenga la función generadora de momentos conjunta de X e Y.
(c) Obtenga las funciones de densidad marginales, y calcule $E(X + Y)$ y $E(X - Y)$.
(d) Obtenga la función de densidad conjunta de $U = X + Y$ y $V = X - Y$. Calcule $E(UV)$.

Ejercicio 14: Sean X e Y variables aleatorias independientes.
(a) Si $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ e $Y \sim \text{Bin}(m, \theta)$, pruebe que $X + Y \sim \text{Bin}(n + m, \theta)$.
(b) Si $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, pruebe que $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Ejercicio 15: Sean X_1, X_2,..., X_n variables aleatorias iid χ^2_1 (distribución chicuadrado con un grado de libertad).
(a) Obtenga la fgm marginal de dichas variables.
(b) Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_n$.
(c) Repita el ejercicio asumiendo que $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, donde X_1, X_2,..., X_n variables aleatorias iid $N(0, 1)$.

Ejercicio 16: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias iid con media 0 y varianza 1. Calcule el coeficiente de correlación entre $X_1 - X_2$ y $X_2 + X_3$.

Ejercicio 17: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias no correlacionadas con medias 2, 1 y 4 y varianzas 9, 20 y 12, respectivamente.
(a) Encuentre la media y la varianza de $X_1 - 2X_2 + 5X_3$.
(b) Encuentre la covarianza entre $X_1 + 5X_2$ y $2X_2 - X_3 + 5$.