PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Ayudantía 2 - Modelos probabilísticos

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$. Demuestre las siguientes propiedades.

   (a) $P(A^c) = 1 - P(A)$

   (b) $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

   (c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. Se ha realizado una encuesta entre los estudiantes de grado del MIT (Massachusetts Institute of Technology) para conocer sus preferencias tecnologicas. El 35% de los entrevistados tienen un iPhone y un IPad, el 80% tienen al menos uno de estos dispositivos y el 60% no tiene iPad. Se elige un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que:

   (a) Disponga de iPhone y no de iPad.

   (b) Tenga un iPad pero no un Iphone.

   (c) Tenga unicamente uno de los dos dispositivos.

   (d) No Disponga de ninguno de los dos dispositivos.

3. Una caja contiene r bolas rojas y b bolas blancas, con $r, b \in \mathbb{N}$ y $N := r + b$. Las extracciones se realizan *sin reemplazo* y todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Consideremos un número de extracciones m con $0 \leq m \leq N$. Además asumimos $k < r$ y $l < b$ según el caso que se considere.

   Calcular las siguientes probabilidades:

   (a) La probabilidad de que, en m extracciones, exactamente k de las bolas extraídas sean rojas.

   (b) La probabilidad de que en las primeras k extracciones todas sean rojas y en las siguientes l extracciones todas sean blancas (es decir, un bloque de k rojas seguido de un bloque de l blancas), con $k + l < N$.

4. Una mano de póker consiste en cinco cartas seleccionadas sin reemplazo de una baraja de 52 (sin comodines). Determine la probabilidad de obtener las siguientes combinaciones:

   (a) Escalera de color: las cinco cartas consecutivas y del mismo palo. (A *puede actuar tanto como la carta menor como la mayor.*)

   (b) Escalera de color real: (10, J, Q, K, A) y del mismo palo.

   (c) Póker: cuatro cartas con la misma numeración.

5. **Propuesto:** Se lanza un dado equilibrado una infinidad de veces. Sea A_n = sale un número impar en las n primeras tiradas. Pruebe que $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. *Hint:* $A_n \supseteq A_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$