PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Ayudantía 9 - Modelos probabilísticos

1. Sea X una v.a aleatoria con fgm dada por

$$M_X(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

   (a) Calcule $\mathbb{E}(X)$

   (b) Defina la v.a $Y = aX$. Determine $M_Y(t)$

   (c) Defina la v.a $Z = -\log(X)$. Determine la distribución de Z. Para esto, puede primero calcular la fgm de una exponencial de parametro λ. Corrobore esto determinando la densidad de Z.

2. Sea X una variable aleatoria con $M_X(t)$ definida en $|t| < h$. Pruebe que

   (a) $P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (0, h)$.

   (b) $P(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (-h, 0)$.

3. Para los siguientes casos determine la fdp o fmp de la transformación respectiva

   (a) $X \sim Beta(a, 1), Y = -ln(X)$

   (b) $X \sim P(\lambda), Y = e^X$

   (c) $X \sim Cauchy(0, 1), Y = |X|$

4. Se dice que X tiene distribución normal con parámetro μ y σ^2, denotado por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su fdp está dada por

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

   con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$, y fgm dada por $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

   (a) Si $X \sim N(0, 1)$. Determine la distribución de $Y = \sigma X + \mu$

   (b) Determine a tal que $P(X \leq a) = 0.5$

   (c) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ calcule $P(X > \sigma | X > -2)$

   (d) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ muestre que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(X > \sigma x + \mu)}{\varphi(x)/x} = 1$$

   con $\varphi(x)$ la densidad de una normal estándar.