PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Ayudantía 15 - Modelos probabilísticos

1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria iid desde una distribución de Poisson con parámetro λ. Muestre que la distribución condicional de $X_1, ..., X_{n-1}$ dado $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es multinomial.

2. Sea $\boldsymbol{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con $\boldsymbol{\mu} = (1, 0, 0)^\top$, y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule el vector de medias y matriz de varianza-covarianza del vector $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$, con $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

   (b) ¿Cuales pares^{oooo} de variables son independientes?

   (c) ¿Que distribución tienen las marginales X_1, X_2, X_3?

3. Muestre que si $X_n \xrightarrow{P} X$, entonces $kX_n \xrightarrow{P} kX$, donde k es una constante.

4. Sea $Y_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0, 1)$.

   (a) Calcule $\mathrm{E}(Y_n)$ y $\mathrm{Var}(Y_n)$.

   (b) Pruebe que $Y_n \xrightarrow{P} 1$

   (c) Pruebe que $n(1 - Y_n) \xrightarrow{D} Z \sim \exp(1)$.

5. Sea X una v.a, y $X_n = X + Y_n$, tal que

$$EY_n = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{Var}(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

   donde $\sigma > 0$. Muestre que $X_n \xrightarrow{p} X$.