PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO-VALLE
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ Y NICOLÁS ORTIZ
SEGUNDO SEMESTRE 2025

Ayudantía 13 - Modelos probabilísticos

1. Sea $X_i \overset{ind}{\sim} N(i,1)$ para $i = 1,2,...,n$, y $Y \sim Exp(1)$, variables aleatorias todas independientes entre si. Determine la distribución de la v.a Determine la distribución de la v.a

$$Z = \frac{1}{\sqrt{Y}}\left(-\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} X_i\right)$$

2. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{si } 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

   (a) Sean $U = X + Y$ y $V = Y$. ¿Son U y V independientes?

   (b) Determine las fp de U y V

   (c) Determine $E(UV)$

3. Sea $X \sim P(\lambda)$ y $Y \sim P(\mu)$ independientes. Determine la distribución $Z = X + Y$ vía convolución, y utilizando fgm.

4. Sea R una v.a no negativa, y $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ independiente de R. Determine expresiones para las marginales de X, Y, cuando

$$X = \sqrt{2R}\cos(\Theta) \quad Y = \sqrt{2R}\sin(\Theta)$$

5. Sea $(X,Y)^\top$ un vector aleatorio con fgm bivariada dada por

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + 2\rho t_1 t_2\right)\right]$$

   (a) Determine las fgm marginales de X, Y

   (b) Indique como calcular $E(XY^2)$

   (c) ¿Son X, Y independientes?