Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Interrogación 3

Pregunta 1. Resuelva uno de los siguientes problemas:

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad conjunta dada por:

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

   (a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.
   (b) Sean $U = X^2$ y $V = Y^2$. Pruebe que $U + V \sim \text{Bin}(2, 1/3)$.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.
   (b) Sean $U = X^2$ y $V = Y^2$. Pruebe que $U + V \sim \text{Gama}(2, 1)$.

Solución pregunta 1 (opción discreta)

(a) Independencia de X e Y.

- **Marginales.** Para cada $x \in \{-1, 0, 1\}$ se tiene

$$p_X(x) = \sum_{y=-1}^{1} p_{X,Y}(x, y) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}, \qquad p_Y(y) = \frac{1}{3} \quad (y = -1, 0, 1).$$

- **Verificación de la condición de independencia.** El producto de las marginales cumple

$$p_X(x)\, p_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = p_{X,Y}(x, y), \quad \forall (x, y),$$

  por lo que X e Y son independientes.

Puntajes:

- $1,5$ puntos por calcular correctamente las marginales p_X y p_Y.
- $1,5$ puntos por comprobar que $p_X p_Y = p_{X,Y}$ y concluir la independencia.

(b) Demostración de que $U + V \sim \mathrm{Bin}\big(2, \frac{2}{3}\big)$, donde $U = X^2$ y $V = Y^2$.

Observemos primero que U y V sólo pueden tomar los valores 0 y 1. En efecto, $U = 0$ ocurre cuando $X = 0$ y $U = 1$ cuando $X = \pm 1$ (lo mismo vale para V). Con la tabla de probabilidades se obtiene

$$\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(X = \pm 1) = 4\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(U = 0) = \frac{1}{3}.$$

Por simetría, V posee la misma distribución. Denotemos $p := \frac{2}{3}$.

Como U depende únicamente de X y V únicamente de Y, y ya se mostró que X e Y son independientes, concluimos que U y V también lo son. En consecuencia, U y V constituyen dos variables Bernoulli independientes con parámetro p.

La suma $S := U + V$ de dos Bernoulli independientes es binomial con $n = 2$ ensayos y probabilidad de éxito p. Así,

$$S \sim \mathrm{Bin}\big(2, \tfrac{2}{3}\big), \qquad \mathbb{P}(S = k) = \binom{2}{k} p^k (1 - p)^{2-k}, \; k = 0, 1, 2.$$

Para corroborar, la tabla explícita queda:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(S = k)$	$(1-p)^2 = \frac{1}{9}$	$2p(1-p) = \frac{4}{9}$	$p^2 = \frac{4}{9}$

Queda probado que

$$U + V \;\sim\; \mathrm{Bin}\big(2, \tfrac{2}{3}\big)\,.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por identificar $p = \mathbb{P}(X = \pm 1) = \frac{2}{3}$.
- $1,0$ punto por argumentar la independencia de U y V.
- $1,0$ punto por justificar que la suma de dos Bernoulli es binomial y presentar la distribución final.

Comentario metodológico. También se otorgará puntaje completo a demostraciones que obtengan la distribución de $U + V$ usando *convolución* de funciones de masa o la *función generadora de momentos* (FGM), siempre que el argumento esté correctamente justificado.

Solución pregunta 1 (opción continua)

Considérese el vector aleatorio (X, Y) con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 4xy\, e^{-(x^2+y^2)}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

(a) Independencia de X y Y.

Para $x > 0$ la densidad marginal de X se obtiene integrando en y:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty 4xy\, e^{-(x^2+y^2)}\, dy = 4x\, e^{-x^2} \int_0^\infty y\, e^{-y^2}\, dy \\ &= 4x\, e^{-x^2} \Big[-\tfrac{1}{2} e^{-y^2} \Big]_0^\infty = 2x\, e^{-x^2}, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Por simetría, $f_Y(y) = 2y\, e^{-y^2}$ para $y > 0$.

El producto de las marginales es

$$f_X(x)\, f_Y(y) = \big(2x\, e^{-x^2}\big)\big(2y\, e^{-y^2}\big) = 4xy\, e^{-(x^2+y^2)} = f_{X,Y}(x, y),$$

igualdad que se cumple para todo $x > 0$, $y > 0$. Por lo tanto, X e Y son variables aleatorias independientes.

Puntajes:

- $1,0$ punto por obtener $f_X(x) = 2x\, e^{-x^2}$.
- $1,0$ punto por obtener $f_Y(y) = 2y\, e^{-y^2}$.
- $1,0$ punto por mostrar que $f_X f_Y = f_{X,Y}$ y concluir la independencia.

(b) Demostrar que $U + V \sim \text{Gamma}(2, 1)$ para $U = X^2$ y $V = Y^2$.

Sea $U = X^2$. La transformación $x = \sqrt{u}$ (con $u > 0$) tiene jacobiano $|dx/du| = 1/(2\sqrt{u})$. Utilizando la densidad marginal de X,

$$f_U(u) = f_X(\sqrt{u}) \left| \frac{dx}{du} \right| = \big(2\sqrt{u}\, e^{-u}\big)\, \frac{1}{2\sqrt{u}} = e^{-u}, \qquad u > 0.$$

Este es precisamente el formato de una Exp(1), es decir Gamma(1, 1). De manera análoga $V = Y^2$ tiene la misma distribución Gamma(1, 1). Como en la parte (a) se estableció la independencia de X y Y, las variables U y V —funciones de X y Y, respectivamente— también son independientes.

La suma de dos gamas independientes con el mismo λ sigue siendo gama con parámetros α igual a la suma de los α_i, y λ inalterado. Aquí $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y $\lambda = 1$; por consiguiente,

$$U + V \ \sim \ \text{Gamma}(\,1 + 1,\ 1\,) = \text{Gamma}(2, 1).$$

Se concluye, entonces, que

$$U + V \sim \text{Gamma}(2, 1)\ .$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por aplicar el cambio de variable y derivar $f_U(u) = e^{-u}$.
- $1,0$ punto por repetir el procedimiento para V y establecer la independencia.
- $1,0$ punto por utilizar la propiedad de la suma de gamas para concluir la distribución de $U + V$.

Pregunta 2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 - \alpha(1 - 2x)(1 - 2y), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $|\alpha| \leq 1$.

(a) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ y luego analice la validez de la siguiente afirmación:
Si $Cov(X, Y) = 0$, entonces X e Y son independientes.

(b) Suponga que se desea construir un triángulo isósceles con base $2X$ y altura Y. ¿Cuál es el valor de α que maximiza el área esperada del triángulo?

(c) Para $\alpha = 0$, calcule la probabilidad de que el triángulo se encuentre dentro del cuadrado unitario con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

Solución pregunta 2

(a) Cálculo detallado de $\text{Cov}(X, Y)$

Recordemos la definición fundamental

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[\,XY\,] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\,},$$

de modo que necesitamos tres ingredientes: (i) las densidades marginales, (ii) los valores esperados $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$, (iii) el valor esperado conjunto $\mathbb{E}[XY]$.

- **Cálculo de las marginales f_X y f_Y.**

  Tomemos f_X; el caso de f_Y es análogo por simetría.

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 \Big\{1 - \alpha\big(1-2x\big)\big(1-2y\big)\Big\}\,dy$$
$$= \underbrace{\int_0^1 1\,dy}_{=1} - \alpha\,(1-2x)\,\underbrace{\int_0^1 \big(1-2y\big)\,dy}_{=0} = 1, \qquad 0 < x < 1.$$

  Por lo tanto $f_X(x) = 1$ y, de la misma forma, $f_Y(y) = 1$. Cada variable es uniforme en $(0,1)$.

- **Valores esperados de las marginales.**

  Con $X, Y \sim U(0,1)$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}.$$

- **Cálculo de $\mathbb{E}[XY]$.**

  Expandimos el integrando para clarificar las partes que dependen de α:

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1\int_0^1 xy\Big[1 - \alpha\big(1-2x\big)\big(1-2y\big)\Big]\,dy\,dx$$
$$= \underbrace{\iint xy\,dy\,dx}_{(1)} - \alpha\,\underbrace{\iint xy(1-2x)(1-2y)\,dy\,dx}_{(2)}.$$

  (1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 xy\,dy\,dx = \Big[\tfrac{1}{2}\Big] \times \Big[\tfrac{1}{2}\Big] = \frac{1}{4}.$

  (2) Calculemos primero el integral en y:

$$\int_0^1 y(1-2y)\,dy = \int_0^1 \big(y - 2y^2\big)\,dy = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}.$$

  Entonces

$$\int_0^1 [x(1-2x)]\,dx = \int_0^1 \big(x - 2x^2\big)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}.$$

  Multiplicando ambos resultados, $(2) = -\dfrac{1}{6} \times \big(-\dfrac{1}{6}\big) = \dfrac{1}{36}$.

  Por tanto

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{4} - \alpha\Big(\frac{1}{36}\Big) = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{36}.$$

- **Ensamblo de la covarianza.**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{36}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\alpha}{36}.$$

- **Conclusión sobre independencia.**

  $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ sucede sólo cuando $\alpha = 0$.

  $$f_{X,Y}(x,y)\big|_{\alpha=0} = 1 = f_X(x)\, f_Y(y),$$

  lo que demuestra independencia *exactamente* para $\alpha = 0$. Si $\alpha \neq 0$ la densidad conjunta *no* factoriza, de modo que las variables no son independientes, aun cuando $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$ cuantifica la fuerza (y sentido) de la dependencia lineal.

Puntajes:

- $1,0$ punto por calcular $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\alpha/36$.
- $1,0$ punto por analizar el caso $\alpha = 0$ y la relación "covarianza cero implica independencia".

(b) Valor de α que maximiza el área esperada $\mathbb{E}[A]$

La variable aleatoria que describe el área del triángulo isósceles se obtiene multiplicando la mitad de su base $2X$ por la altura Y; por lo tanto

$$A \;=\; \frac{1}{2}\,(2X)\,Y \;=\; X\,Y.$$

En el apartado (a) se determinó que la esperanza conjunta de X y Y depende linealmente del parámetro α:

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{36}.$$

Puesto que $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[XY]$, la función objetivo es

$$\mathbb{E}[A](\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{36}, \qquad |\alpha| \leq 1.$$

La derivada con respecto a α es constante y negativa $\left(\frac{d}{d\alpha}\mathbb{E}[A] = -\frac{1}{36}\right)$; ello implica que la esperanza del área disminuye al aumentar α. Para maximizar $\mathbb{E}[A]$ basta, entonces, con tomar el valor mínimo permitido del intervalo, esto es $\alpha^* = -1$. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene

$$\mathbb{E}[A]_{\text{máx}} \;=\; \frac{1}{4} - \frac{(-1)}{36} \;=\; \frac{5}{18} \;\approx 0{,}2778.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\alpha^* = -1, \quad \mathbb{E}[A]_{\text{máx}} = \frac{5}{18}}.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por deducir $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{36}$.
- $1,0$ punto por identificar $\alpha^* = -1$ y obtener $\mathbb{E}[A]_{\text{máx}} = 5/18$.

(c) Probabilidad de que el triángulo quede dentro del cuadrado unitario cuando $\alpha = 0$

Al fijar $\alpha = 0$, la densidad conjunta se vuelve constante sobre el cuadrado $(0,1)^2$, lo que significa que X y Y son independientes y ambos distribuidos uniformemente en $(0,1)$. Para que todo el triángulo —con vértices $(0,0)$, $(2X,0)$ y (X,Y)— se encuentre dentro de dicho cuadrado es necesario y suficiente que la base no traspase la frontera derecha, es decir,

$$2X \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad X \leq \tfrac{1}{2}.$$

La coordenada vertical Y ya cumple $0 < Y < 1$ por construcción, de modo que no introduce restricciones adicionales.

Dado que X es uniforme en $(0,1)$, la probabilidad de que la condición $X \leq \frac{1}{2}$ se verifique corresponde a la longitud del intervalo $(0, \frac{1}{2})$ dentro del dominio total, esto es

$$\Pr\big[\,\text{triángulo dentro del cuadrado}\big] \;=\; \int_0^{1/2} 1\, dX \;=\; \frac{1}{2}.$$

Así, el resultado requerido es

$$\boxed{\Pr\big[\text{inclusión en el cuadrado}\big] = \frac{1}{2}}.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por establecer la condición geométrica $2X \leq 1$ (equivalente a $X \leq \frac{1}{2}$).
- $1,0$ punto por calcular la probabilidad $\Pr[X \leq \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$.

Comentario metodológico. Con $\alpha = 0$ la densidad conjunta es el producto de dos uniformes $(0,1)$. Por lo tanto, un argumento puramente *gráfico* en el cuadrado unidad que identifique la región $X \leq \frac{1}{2}$ y concluya que la probabilidad es $1/2$ será considerado completamente válido.

Pregunta 3. Demuestre las siguientes afirmaciones, donde X e Y son variables aleatorias:

(a) Si X e Y tienen segundo momento finito, entonces $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$.

(b) Si $X \sim \text{Poisson}(1)$ e $Y \sim \text{Poisson}(1)$ son independientes, entonces $X + Y \sim \text{Poisson}(2)$.

(c) Si $X \sim \mathcal{N}(1,1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$ son independientes, entonces

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Solución pregunta 3

(a) Relación entre $\mathrm{Cov}(X+Y,\, X-Y)$ y las varianzas individuales

Sea (X, Y) un par de variables aleatorias *con segundo momento finito*; es decir, $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ y $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Este supuesto es indispensable porque:

* garantiza que las varianzas $\mathrm{Var}(X)$ y $\mathrm{Var}(Y)$ estén bien definidas (requieren $\mathbb{E}[X^2]$ y $\mathbb{E}[Y^2]$); * asegura que todos los productos que aparecerán, en particular $\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)]$, tienen esperanza finita, lo que nos permite manipular esperanzas y restas sin ambigüedades.

Bajo esa premisa, calculemos $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$ a partir de la definición $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[V]$. Fijemos $U = X+Y$ y $V = X-Y$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[UV] &= \mathbb{E}\big[(X+Y)(X-Y)\big] = \mathbb{E}\big[X^2 - Y^2\big] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2],\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[V] &= \big(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\big)\big(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]\big) \\ &= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2.\end{aligned}$$

Al restar ambas expresiones obtenemos

$$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \big[\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\big] \;-\; \big[\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2\big] = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y),$$

donde la igualdad final usa la definición $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2$. Todo está bien definido porque los segundos momentos son finitos, tal como se requirió al inicio.
Puntajes:

- $1,0$ punto por el desarrollo algebraico correcto con definiciones de covarianza y varianza.
- $1,0$ punto por justificar la necesidad del segundo momento finito.

(b) Suma de dos Poisson independientes

Sean $X \sim \mathrm{Poisson}(1)$ y $Y \sim \mathrm{Poisson}(1)$ *independientes*. La independencia es crucial: permite factorizar las funciones generadoras de momentos (mgf), paso que no sería válido de otra forma.

La mgf de una $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ es $M_Z(t) = \exp\big[\lambda\,(e^t - 1)\big]$. Para la suma $S = X + Y$,

$$M_S(t) = \underbrace{M_X(t)}_{\exp(e^t-1)}\;\underbrace{M_Y(t)}_{\exp(e^t-1)} = \exp\big[2\,(e^t - 1)\big].$$

El factoreo $M_X(t)M_Y(t)$ es válido únicamente porque $\mathbb{E}[e^{tX+tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\,\mathbb{E}[e^{tY}]$ cuando X y Y son independientes. La mgf resultante coincide con la de una $\mathrm{Poisson}(2)$; por unicidad de la mgf se concluye

$$\boxed{X + Y \sim \mathrm{Poisson}(2)}.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por escribir la mgf de Poisson(1) y factorizarla gracias a la independencia.
- $1,0$ punto por concluir correctamente que $X+Y \sim$ Poisson(2).

(c) Combinación lineal de normales independientes

Considérese $X \sim \mathcal{N}(1,1)$ y $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$, *independientes*. La independencia garantiza que la covarianza entre X e Y sea cero y, más importante, habilita el teorema que dice: "Una combinación lineal $aX+bY$ de normales independientes es normal con media $a\mu_X + b\mu_Y$ y varianza $a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$."

Tomemos $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$; aquí $a = 1/\sqrt{2}$ y $b = -1/\sqrt{2}$. Aplicando la regla:

$$\mathbb{E}[U] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) \; + \; \frac{-1}{\sqrt{2}}(1) = 0, \qquad \mathrm{Var}(U) = \frac{1}{2}(1) \; + \; \frac{1}{2}(1) = 1.$$

No aparece término de covarianza $2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ porque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ al ser independientes. Por consiguiente

$$\boxed{U \sim \mathcal{N}(0,1)}.$$

- $1,0$ punto por aplicar correctamente la fórmula de la media y la varianza de una combinación lineal, mostrando que $\mathbb{E}[U] = 0$ y $\mathrm{Var}(U) = 1$.
- $1,0$ punto por explicar explícitamente que la independencia implica $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (o, de forma equivalente, permite usar la regla $a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$ sin término cruzado) y concluir $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(c) Demostración mediante la función generadora de momentos

Consideremos la variable

$$U \;=\; \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad X,\, Y \text{ independientes con } X \sim \mathcal{N}(1,1),\; Y \sim \mathcal{N}(1,1).$$

Recordemos primero que la función generadora de momentos (FGM) de una normal $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ es

$$M_Z(t) = \exp\Big(\mu\, t + \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 t^2\Big).$$

Aplicamos esta fórmula a los dos términos que componen U.

1. Para $X/\sqrt{2}$. Basta reemplazar t por $t/\sqrt{2}$ en la FGM de X:

$$M_{X/\sqrt{2}}(t) \;=\; \exp\Big(\tfrac{t}{\sqrt{2}} + \tfrac{t^2}{4}\Big).$$

2. Para $(-Y)/\sqrt{2}$. Realizamos el mismo cambio, pero con signo opuesto en el término lineal:

$$M_{-Y/\sqrt{2}}(t) \;=\; \exp\Big(-\tfrac{t}{\sqrt{2}} + \tfrac{t^2}{4}\Big).$$

Dado que X y Y son independientes, la FGM de su combinación lineal se obtiene multiplicando las FGM calculadas:

$$M_U(t) \;=\; M_{X/\sqrt{2}}(t)\, M_{-Y/\sqrt{2}}(t) \;=\; \exp\big(\tfrac{t^2}{2}\big).$$

La independencia es indispensable en este paso: sin ella no podríamos factorizar la esperanza de $e^{t(X-Y)/\sqrt{2}}$ en el producto de esperanzas individuales.

Finalmente, la FGM obtenida coincide exactamente con la de una normal estándar $\mathcal{N}(0,1)$, pues $\exp\big(t^2/2\big) = \exp\big(0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2\big)$. Por unicidad de la función generadora de momentos concluimos que

$$\boxed{U \;\sim\; \mathcal{N}(0,1)}.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por calcular media y varianza (o FGM) de U.
- $1,0$ punto por señalar explícitamente dónde se usa la independencia y concluir $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Comentario metodológico. En los ítems (b) y (c) se aceptará como alternativa cualquier resolución que obtenga la distribución buscada *vía convolución* de funciones de probabilidad o densidades, en lugar de la demostración con FGM o propiedades de medias y varianzas.