Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Interrogación 2

1. **Pregunta 1.** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ c - x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Demuestre que $c = 2$ y encontrar la mediana de X.
Solución a: *Constante c y mediana m*

- **Cálculo de c (normalización)**
  Aplicando: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (c - x)\,dx.$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \int_1^2 (c-x)\,dx = \left[cx - \tfrac{x^2}{2}\right]_1^2 = (2c-2) - \left(c - \tfrac{1}{2}\right) = c - \tfrac{3}{2}.$$

  Por tanto $1 = \frac{1}{2} + (c - \frac{3}{2}) \Rightarrow c = 2$.
- **Cálculo de una mediana m**
  Primero construimos F_X (ver Sol. b más abajo). Observemos que $F_X(1^-) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.
  Como f_X es continua en $(0,1)$ y positiva, F_X es estrictamente creciente allí; luego la ecuación $F_X(x) = \frac{1}{2}$ se satisface únicamente en $x = 1$. Por lo tanto $\boxed{m = 1}$ es mediana. (En este caso la FDA "salta" de derivada al cambiar de rama, pero no hay masa puntual en $x = 1$; cualquier valor en $[1, 1]$ sería mediana, de hecho el conjunto de medianas es $\{1\}$.)
  Tambien se concidera correcto graficas $f_X(x)$ y notar que es simetrica con respecto a 1

Puntajes:

- $1,0$ punto por normalizar la densidad y demostrar que $c = 2$.
- $1,0$ punto por determinar y justificar la mediana $m = 1$.

(b) Obtenga y grafique $F_X(x) = \Pr(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Solución b: *Función de distribución* $F_X(x)$

Integrando por tramos de acuerdo con $F_X(x) = \Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$. y usando $c = 2$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \displaystyle\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}, & 0 < x \le 1, \\ \displaystyle\int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2-t)\,dt = \frac{1}{2} + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

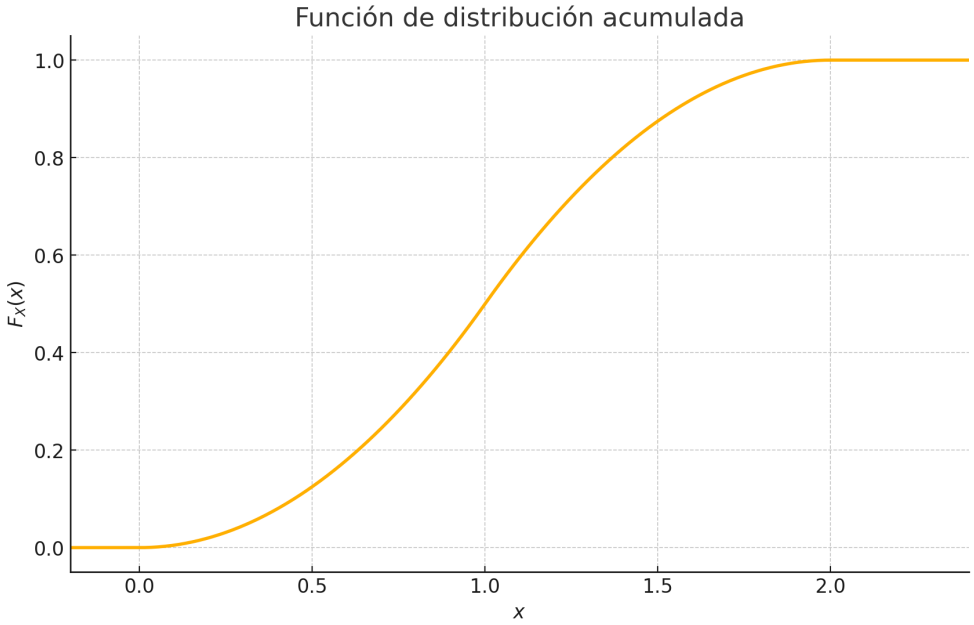


Figura 1: Gráfico de la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

Puntajes:

- $1,5$ puntos por obtener correctamente los cuatro tramos de $F_X(x)$.
- $0,5$ puntos por el bosquejo a mano del gráfico (ejes rotulados y puntos clave).

(c) Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\mathrm{Var}(X)$.
Solución c: *Esperanza y varianza*

Paso 1 – Esperanza $E[X]$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \cdot f_X(x)\,dx + \int_1^2 x \cdot f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x \cdot x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx \\ &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx \\ &= \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \tfrac{x^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left[(4 - \tfrac{8}{3}) - (1 - \tfrac{1}{3})\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Paso 2 – Segundo momento $E[X^2]$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2\, f_X(x)\,dx + \int_1^2 x^2\, f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx \\ &= \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\tfrac{2x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4}\right]_1^2 \\ &= \tfrac{1}{4} + \left[\tfrac{16}{3} - \tfrac{16}{4} - \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Paso 3 – Varianza.

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{E[X] = 1, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6}}$$

Puntajes:

- $1,0$ puntos por calcular la esperanza $E[X] = 1$.
- $1,0$ punto por obtener la varianza $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6}$.

2. **Pregunta 2.** Los organizadores de un concierto al aire libre creen que la asistencia dependerá del clima. Con base en la experiencia, estiman:

Clima	**Probabilidad**	**Asistencia**
Lluvioso	0,2	500
Nublado	0,6	1000
Despejado	0,2	2000

(a) ¿Cuál es la asistencia esperada? ¿Cuál es la probabilidad de que la asistencia supere lo esperado?
Usamos la *definición de esperanza para variables discretas*: $E[X] = \sum x_i\, p_i$.

$$E[A] = 0{,}2(500) + 0{,}6(1000) + 0{,}2(2000) = 1100.$$

Para la probabilidad pedida empleamos la *definición de evento*: $\Pr(A > 1100) = \sum_{A_i > 1100} p_i$. Sólo el valor $A = 2000$ supera 1100.

$$\Pr(A > 1100) = \Pr(\text{despejado}) = 0{,}2.$$

$$\boxed{E[A] = 1100}, \qquad \boxed{\Pr(A > 1100) = 0{,}2}.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por calcular correctamente la asistencia esperada $E[A] = 1100$.
- $1,0$ punto por calcular correctamente $\Pr(A > 1100) = 0{,}2$.

(b) Suponga que cada entrada cuesta \$5 y que hay un costo fijo (carpas, banda, etc.) de \$2000. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Cuál es la probabilidad de que la ganancia exceda lo esperado?
Solución b
Definimos la ganancia neta $G = 5A - C$ con costo fijo $C = 2000$.
(i) Esperanza de G. Usamos la *propiedad lineal de la esperanza*: $E[\alpha X + \beta] = \alpha\, E[X] + \beta$.

$$E[G] = 5\, E[A] - 2000 = 5(1100) - 2000 = 3500.$$

(ii) Probabilidad de ganar más que el valor esperado. Construimos la tabla de ganancias posibles:

A	$G = 5A - 2000$
500	500
1000	3000
2000	8000

Sólo $G = 8000$ excede $E[G] = 3500$; ocurre con clima despejado.

$$\Pr(G > 3500) = \Pr(\text{despejado}) = 0{,}2.$$

$$\boxed{E[G] = \$3\,500}, \qquad \boxed{\Pr(G > 3500) = 0{,}2}.$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por obtener la ganancia esperada $E[G] = \$3\,500$.
- $1,0$ punto por calcular la probabilidad $\Pr(G > E[G]) = 0{,}2$.

(c) ¿Cuál es el máximo que los organizadores podrían pagar por el costo fijo para tener un 80 % de posibilidades de lograr ganancias en el evento?

Solución c

Queremos que la probabilidad de obtener ganancia positiva sea $\Pr(G > 0) = \Pr(5A - C > 0) \geq 0{,}8$.

Los umbrales para $G > 0$ son

$$5(500) = 2500, \qquad 5(1000) = 5000, \qquad 5(2000) = 10000.$$

$$\Pr(G > 0) = \begin{cases} 1, & C < 2500, \\ 0{,}8, & 2500 \leq C < 5000, \\ 0{,}2, & 5000 \leq C < 10000, \\ 0, & C \geq 10000. \end{cases}$$

Para cumplir $\Pr(G > 0) \geq 0{,}8$ necesitamos

$$\boxed{C < \$5\,000}.$$

(Con $C = 2500$ la probabilidad es exactamente 0,8; en la práctica cualquier costo $< \$5\,000$ sirve.) **Puntajes:**

- $1,0$ punto por plantear correctamente la condición $\Pr(G > 0) \geq 0{,}8$ y analizar los umbrales.
- $1,0$ punto por llegar a la conclusión $C < \$5\,000$ (máximo costo fijo aceptable).

3. **Pregunta 3.** Un sistema de comunicaciones transmite mensajes en intervalos de tiempo aleatorios, donde el tiempo entre mensajes es una variable aleatoria X con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Obtenga la función generadora de momentos de X y calcule $\mathbb{E}[X^k]$ para $k = 1, 2$.

Solución a

Usamos la definición de función generadora de momentos (FGM): $M_X(t) = E[e^{tX}] = \displaystyle\int_0^\infty e^{tx} f_X(x)\, dx$.

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-(1-t)x}\, dx = \frac{1}{1-t}, \qquad t < 1.$$

Usamos la relación $E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$.

$$E[X] = M_X'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1, \qquad E[X^2] = M_X''(0) = \frac{2}{(1-0)^3} = 2.$$

$$\boxed{M_X(t) = \frac{1}{1-t}}, \qquad \boxed{E[X] = 1,\ E[X^2] = 2}.$$

Puntajes:

- 1 puntos por obtener correctamente la función generadora de momentos $M_X(t) = \dfrac{1}{1-t}$.
- 2 puntos por derivar $M_X(t)$ y calcular $\mathbb{E}[X] = 1$ y $\mathbb{E}[X^2] = 2$.

(b) Sea $h(X)$ el costo asociado a cada transmisión, donde h es una función convexa y creciente.

(i) ¿Es posible afirmar que $\mathbb{E}[h(X)] \geq h\big(\mathbb{E}[X]\big)$? Justifique brevemente.

(ii) Calcule $h\big(\mathbb{E}[X]\big)$ para $h(X) = X^2 + 2X$.

(iii) Calcule explícitamente $\mathbb{E}[h(X)]$ para $h(X) = X^2 + 2X$.

Solución b

Sea h convexa y creciente.

(i) *Usamos la desigualdad de Jensen:* Para v.a. X y h convexa, $E\{h(X)\} \geq h\{E(X)\}$. Como h además es creciente, la afirmación permanece válida, por lo que

$$\boxed{E\{h(X)\} \geq h\{E(X)\}.}$$

(ii) Para $h(x) = x^2 + 2x$ y $E[X] = 1$:

$$h\{E(X)\} = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3.$$

$$\boxed{h\{E(X)\} = 3.}$$

(iii) *Usamos linealidad de la esperanza:*

$$E\{h(X)\} = E[X^2 + 2X] = E[X^2] + 2E[X] = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

$$\boxed{E\{h(X)\} = 4.}$$

Puntajes:

- $1,0$ punto por justificar con la desigualdad de Jensen que $\mathbb{E}[h(X)] \geq h\big(\mathbb{E}[X]\big)$ para toda función convexa y creciente h.
- $0,5$ puntos por calcular $h\big(\mathbb{E}[X]\big) = 3$ cuando $h(x) = x^2 + 2x$.
- $1,5$ puntos por calcular $\mathbb{E}[h(X)] = 4$ usando los momentos obtenidos en (a) y la linealidad de la esperanza.

Nota. Si X es una variable aleatoria no negativa con esperanza finita, entonces para todo $a > 0$ se cumple la desigualdad de Markov

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$