Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 11

1. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. Para $n \geq 2$, sean $S = \sum_{i=2}^{n} X_i$ y $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Obtenga las distribuciones de S y T.
   Solución:

   Caso 2 **sumandos.** Sean $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$.
   La densidad de cada X_i es

   $$f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

   La densidad de $U = X_1 + X_2$ viene por convolución:

   $$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^u f_{X_1}(s)\, f_{X_2}(u-s)\, ds = \int_0^u \lambda e^{-\lambda s}\ \lambda e^{-\lambda(u-s)}\, ds \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda u} \int_0^u 1\, ds = \lambda^2\, u\, e^{-\lambda u}. \end{aligned}$$

   Esto coincide con la densidad $\Gamma(2, \lambda)$:

   $$f(u) = \frac{\lambda^2}{1!}\, u^{2-1} e^{-\lambda u} = \lambda^2\, u\, e^{-\lambda u}.$$

   Caso 3 **sumandos.** Definimos $V = U + X_3$ con $X_3 \sim \text{Exp}(\lambda)$.
   Su densidad es

   $$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^v f_U(s)\, f_{X_3}(v-s)\, ds = \int_0^v \left[\lambda^2 s e^{-\lambda s}\right]\ \left[\lambda e^{-\lambda(v-s)}\right] ds \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda v} \int_0^v s\, ds = \lambda^3 e^{-\lambda v}\, \frac{v^2}{2} = \frac{\lambda^3}{2!}\, v^2\, e^{-\lambda v}, \end{aligned}$$

   que es la densidad $\Gamma(3, \lambda)$.

   Patrón general. Al añadir cada nueva exponencial se aumenta en 1 el exponente de v y en 1 el factorial del denominador. Por inducción,

   $$\sum_{i=1}^{k} X_i \ \sim\ \Gamma(k, \lambda).$$

Aplicación a S y T.

$$S = \sum_{i=2}^{n} X_i \text{ (suma de } n-1 \text{ exponentiales)} \implies S \sim \Gamma(n-1, \lambda),$$
$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ (suma de } n \text{ exponentiales)} \implies T \sim \Gamma(n, \lambda).$$

b) Pruebe que la fdp condicional de T dado $X_1 = x_1$ es tal que $f_{T|X_1=x_1}(t) = f_S(t - x_1)$, para todo $t > x_1 > 0$.
Solución:

Variables y densidades conocidas.
Sea $S = \sum_{i=2}^{n} X_i$, con

$$f_S(s) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, s^{n-2} e^{-\lambda s}, \quad s > 0,$$

y

$$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda), \quad f_{X_1}(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1}, \quad x_1 > 0.$$

Además

$$T = X_1 + S.$$

Densidad conjunta de (X_1, S).
Por independencia,

$$f_{X_1,S}(x_1, s) = f_{X_1}(x_1)\, f_S(s) = \lambda e^{-\lambda x_1}\, \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, s^{n-2} e^{-\lambda s}.$$

Cambio de variables $(x_1, s) \to (x_1, t)$.
Definimos $t = x_1 + s$. Entonces $s = t - x_1$ y el jacobiano es 1. Por tanto

$$f_{X_1,T}(x_1, t) = f_{X_1,S}\big(x_1,\, s = t - x_1\big) = \lambda e^{-\lambda x_1}\, \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, (t - x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t-x_1)},$$

válido para $t > x_1 > 0$.

Densidad condicional.
Por definición,

$$f_{T|X_1=x_1}(t) = \frac{f_{X_1,T}(x_1, t)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x_1}\, \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, (t - x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t-x_1)}}{\lambda e^{-\lambda x_1}} = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, (t-x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t-x_1)}.$$

Finalmente,

$$\boxed{f_{T|X_1=x_1}(t) = f_S(t - x_1), \quad t > x_1 > 0.}$$

c) Encuentre la fdp condicional de X_1 dado $T = t$ y calcule $E(X_1 \mid T = t)$.
Solución:

Densidad conjunta (X_1, T).
De (b), con $S = T - X_1$,

$$f_{X_1,T}(x_1, t) = f_{X_1}(x_1)\, f_S(t - x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1}\, \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}(t - x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t-x_1)},$$

válido para $0 < x_1 < t$.

Densidad marginal de T.
De (a),

$$f_T(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{\,n-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Densidad condicional $f_{X_1|T=t}$.

$$\begin{aligned} f_{X_1|T=t}(x_1) = \frac{f_{X_1,T}(x_1, t)}{f_T(t)} &= \frac{\lambda e^{-\lambda x_1}\, \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}(t - x_1)^{n-2} e^{-\lambda(t-x_1)}}{\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{\,n-1} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-2)!}\, \frac{(t - x_1)^{n-2}}{t^{\,n-1}} = (n-1)\, \frac{(t - x_1)^{n-2}}{t^{\,n-1}} \\ &= \frac{n-1}{t}\Big(1 - \frac{x_1}{t}\Big)^{n-2}, \quad 0 < x_1 < t. \end{aligned}$$

Esperanza condicional.
Reconociendo que $X_1/t \sim \text{Beta}(1, n-1)$,

$$E[X_1 \mid T = t] = t\, \frac{1}{1 + (n-1)} = \frac{t}{n}.$$

d) Pruebe que $\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} \xrightarrow{P} \lambda$ y $\sqrt{n}\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} - \lambda\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.
Solución:

Sea la media muestral

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Convergencia en probabilidad.
Por la Ley Débil de los Grandes Números,

$$\bar{X}_n \;\xrightarrow{\;P\;}\; E[X_i] = \frac{1}{\lambda}.$$

Como la función $g(x) = 1/x$ es continua en $x = 1/\lambda$, se aplica el Teorema de la Función Continua:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n} = g(\bar{X}_n) \;\xrightarrow{\;P\;}\; g\Big(\tfrac{1}{\lambda}\Big) = \lambda.$$

Convergencia en distribución (CLT + Delta method).
Por el Teorema Central del Límite,

$$\sqrt{n}\Big(\bar{X}_n - E[X_i]\Big) = \sqrt{n}\Big(\bar{X}_n - \tfrac{1}{\lambda}\Big) \xrightarrow{d} N\Big(0, \mathrm{Var}(X_i)\Big) = N\big(0, \tfrac{1}{\lambda^2}\big).$$

Sea $g(x) = 1/x$. Entonces $g'(x) = -1/x^2$, y evaluado en $x = 1/\lambda$:

$$g'\big(\tfrac{1}{\lambda}\big) = -\lambda^2.$$

Por el método Delta,

$$\sqrt{n}\Big(g(\bar{X}_n) - g(\tfrac{1}{\lambda})\Big) \xrightarrow{d} N\Big(0,\, [g'(\tfrac{1}{\lambda})]^2\, \mathrm{Var}(X_i)\Big) = N\big(0, \lambda^2\big).$$

Como $g(\bar{X}_n) = \frac{n}{\sum_i X_i}$ y $g(1/\lambda) = \lambda$, concluye

$$\sqrt{n}\Big(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} - \lambda\Big) \xrightarrow{d} N\big(0, \lambda^2\big).$$

2. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, y defina las secuencias:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad Z_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \geq 1.$$

a) Pruebe que $2Y_nZ_n \xrightarrow{P} 1$.
Solución:

Convergencia de Y_n.
Sea

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i \overset{iid}{\sim} U(0,1).$$

Por la Ley Débil de los Grandes Números,

$$Y_n \xrightarrow{P} E[X_i] = \frac{1}{2}.$$

Convergencia de Z_n.
Sea

$$Z_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$P\big(Z_n \leq 1 - \varepsilon\big) = \big(1 - \varepsilon\big)^n \longrightarrow 0,$$

luego $Z_n \xrightarrow{P} 1$.

Producto de convergencias.
Como $Y_n \xrightarrow{P} 1/2$ y $Z_n \xrightarrow{P} 1$, por el Teorema del Límite de la Probabilidad para productos,

$$2Y_nZ_n \xrightarrow{P} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

b) Calcule aproximadamente $P(2Y_n \leq 1)$.
Solución: Observamos que

$$P\big(2Y_n \leq 1\big) = P\big(Y_n \leq \tfrac{1}{2}\big).$$

Como Y_n es la media muestral de $X_i \overset{iid}{\sim} U(0,1)$, tenemos

$$E[Y_n] = \tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y_n) = \frac{\mathrm{Var}(X_i)}{n} = \frac{1/12}{n} = \frac{1}{12n}.$$

Por el Teorema Central del Límite,

$$Y_n \approx N\Big(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{12n}\Big) \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/(12n)}} \approx N(0,1).$$

Luego

$$P\big(Y_n \leq \tfrac{1}{2}\big) = P\Big(\frac{Y_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/(12n)}} \leq 0\Big) \approx \Phi(0) = 0{,}5.$$

c) Sea G_n la fda de $n(Z_n - 1)$. Pruebe que G_n converge a:

$$G(w) = \begin{cases} e^w, & w < 0 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Solución:
. Expresión exacta de $G_n(w)$.

$$G_n(w) = P\big(Z_n \leq 1 + \tfrac{w}{n}\big) = \big[F_X\big(1 + \tfrac{w}{n}\big)\big]^n,$$

donde $F_X(x) = P(X_i \leq x) = x$ en $[0,1]$.

Evaluación de la fda de la uniforme.
Para $-n < w < 0$, $1 + \frac{w}{n} \in (0,1)$ y

$$F_X\big(1 + \tfrac{w}{n}\big) = 1 + \tfrac{w}{n}.$$

Luego

$$G_n(w) = \Big(1 + \tfrac{w}{n}\Big)^n.$$

Tomar el límite.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{w}{n}\big)^n = e^w$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} G_n(w) = \begin{cases} e^w, & w < 0, \\ 1, & w \geq 0. \end{cases}$$

Es decir, la distribución límite es la de una variable cuya fda es

$$G(w) = \begin{cases} e^w, & w < 0, \\ 1, & w \geq 0. \end{cases}$$

d) Obtenga la distribución asintótica de Z_n^2.
Solución: Sabemos que

$$n(Z_n - 1) \xrightarrow{d} W,$$

donde la fda límite de W es

$$P(W \leq w) = \begin{cases} e^w, & w < 0, \\ 1, & w \geq 0. \end{cases}$$

Queremos la táctica para Z_n^2. Observa que

$$Z_n = 1 + \frac{W_n}{n},$$

con $W_n = n(Z_n - 1)$. Entonces

$$Z_n^2 = \left(1 + \frac{W_n}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2W_n}{n} + \frac{W_n^2}{n^2}.$$

Multiplicamos por n y restamos 1:

$$n(Z_n^2 - 1) = 2W_n + \frac{W_n^2}{n}.$$

Como $W_n \xrightarrow{d} W$ y $W_n^2/n \xrightarrow{P} 0$, por Slutsky,

$$n(Z_n^2 - 1) \xrightarrow{d} 2W.$$

Luego la fda límite de $2W$ es

$$P(2W \leq u) = P\Big(W \leq \tfrac{u}{2}\Big) = \begin{cases} e^{\,u/2}, & u < 0, \\ 1, & u \geq 0. \end{cases}$$

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad dada por:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{36}, & x = 1, 2, 3;\ y = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

b) Calcule $P(X - Y > 0)$ y $E(X - Y)$.

c) Obtenga la función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$ para $x = 1, 2, 3$.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con función de distribución dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases} \quad \text{donde } \theta > 0.$$

a) Sea $Y = 2\bar{X}$, donde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calcule $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.

b) Calcule la función densidad de $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

c) Calcule $E(X_{(n)})$ y $\text{Var}(X_{(n)})$.

5. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \mid X = x \sim \mathcal{N}(x, 1)$ y $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

a) Indique la función densidad conjunta de X e Y. ¿Pueden X e Y ser independientes?

b) Calcule $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$ y $\text{Cov}(X, Y)$.

c) Sean $U = X$ y $V = X - Y$. ¿Son U y V variables aleatorias independientes?