Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 11

1. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. Para $n \geq 2$, sean $S = \sum_{i=2}^{n} X_i$ y $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Obtenga las distribuciones de S y T.

   b) Pruebe que la fdp condicional de T dado $X_1 = x_1$ es tal que $f_{T|X_1=x_1}(t) = f_S(t - x_1)$, para todo $t > x_1 > 0$.

   c) Encuentre la fdp condicional de X_1 dado $T = t$ y calcule $E(X_1 \mid T = t)$.

   d) Pruebe que $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \xrightarrow{P} \lambda$ y $\sqrt{n}\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - \lambda\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$, y defina las secuencias:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \geq 1.$$

   a) Pruebe que $2Y_n Z_n \xrightarrow{P} 1$.

   b) Calcule aproximadamente $P(2Y_n \leq 1)$.

   c) Sea G_n la fda de $n(Z_n - 1)$. Pruebe que G_n converge a:

$$G(w) = \begin{cases} e^w, & w < 0 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   d) Obtenga la distribución asintótica de Z_n^2.

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad dada por:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{36}, & x = 1, 2, 3;\ y = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

   b) Calcule $P(X - Y > 0)$ y $E(X - Y)$.

c) Obtenga la función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$ para $x = 1, 2, 3$.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con función de distribución dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases} \quad \text{donde } \theta > 0.$$

   a) Sea $Y = 2\bar{X}$, donde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calcule $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.

   b) Calcule la función densidad de $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

   c) Calcule $E(X_{(n)})$ y $\text{Var}(X_{(n)})$.

5. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \mid X = x \sim \mathcal{N}(x, 1)$ y $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

   a) Indique la función densidad conjunta de X e Y. ¿Pueden X e Y ser independientes?

   b) Calcule $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$ y $\text{Cov}(X, Y)$.

   c) Sean $U = X$ y $V = X - Y$. ¿Son U y V variables aleatorias independientes?