PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Andrés Díaz - Daniel Gálvez
Segundo semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 5

1. Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde

$$\Omega = \mathbb{R}^+$$
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, (0,\infty), (0,1/4), [1/4,\infty)\}$$
$$P(A) = \frac{2}{\pi}\int_A \frac{1}{1+x^2}dx, \quad A \in \mathcal{A}$$

   (a) Muestre que $\mathcal{A}$ es efectivamente una $\sigma-$álgebra

   (b) Muestre que P es una medida de probabilidad

   (c) Si ahora se define

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, (0,\infty), [1/2,\infty)\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,\infty)\}$$

   ¿Son $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathcal{F}$?

   (a) Para esto debemos corroborar las tres propiedades respectivas. Entonces

   - $\Omega \in \mathcal{A}$

     Claramente esto se cumple, pues $\Omega = (0,\infty) \in \mathcal{A}$

   - Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$, para todo $A \in \mathcal{A}$

     Vamos elemento por elemento.

$$A = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \in \mathcal{A} \quad \checkmark$$
$$A = (0,1/4) \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = [1/4,\infty) \in \mathcal{A} \quad \checkmark$$

     Luego, se cumple esta propiedad.

   - Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

     Claramente se cumple esta propiedad, pues basta notar que todas las uniones existen en la sigma álgebra. Algunos ejemplos particulares son

$$A_1 = (0,1/2), A_2 = A_3 = A_\infty = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,1/2) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots = (0,1/2)$$

$$A_1 = (0,1/2), A_2 = [1/4,\infty], A_3 = A_\infty = \Omega \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,1/2) \cup [1/4,\infty] \cup \Omega \cup \cdots = (0,\infty) = \Omega$$

(b) Debemos mostrar las tres propiedades respectivas. Entonces

- $P(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \frac{2}{\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}arctan(x)\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$

  Esto es claro, pues la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es positiva, por lo cual la integral es siempre positiva.

- Si $A_1, A_2, ...$ son disjuntos de a pares, entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
  Esto es directo

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{2}{\pi}\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{A_1\cup A_2\cup\cdots}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{A_1}\frac{1}{1+x^2}dx + \frac{2}{\pi}\int_{A_2}\frac{1}{1+x^2}dx + \frac{2}{\pi}\int_{A_3}\frac{1}{1+x^2}dx + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_{A_i}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

  Note que en este caso los A_i son intervalos, por lo que las integrales se pueden separar y calcular el área de la región según cada intervalo y luego sumarlos, esto debido a que son disjuntos.

(c) Claramente $\mathcal{A}_1$ no lo es, pues basta notar que

$$A = [1/2, \infty) \in \mathcal{A}_1, \quad A^c = (0, 1/2) \notin \mathcal{A}_1$$

Luego, no se cumple la propiedad 2.
Por otro lado, $\mathcal{A}_2$ si lo es, pues es la sigma álgebra trivial

$$\{\emptyset, (0, \infty)\} = \{\emptyset, \Omega\}$$

2. Consideremos familias con n hijos, donde $n \geq 2$. Sea A el evento de que una familia tiene hijos de ambos sexos, y sea B el evento de que hay como máximo una niña en la familia. Demuestre que el único valor de n para el cual los eventos A y B son independientes es $n = 3$, asumiendo que cada niño tiene una probabilidad de $1/2$ de ser varón.

   Recordemos que A, B son independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - P(\text{o todos son niños o todos son niñas}) \\ &= 1 - [P(\text{todos niños} + P(\text{todas niñas})] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2^n} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{2^n - 2}{2^n} \end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\text{no hay niña o hay una niña}) \\ &= P(\text{no hay niña}) + P(\text{hay una niña}) \\ &= \frac{1}{2^n} + n\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\text{hay una niña}) \\ &= \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

Entonces para que sean independientes se debe cumplir que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^n} &= \frac{2^n - 2}{2^n}\frac{n+1}{2^n} \\ 2^{n-1} &= n + 1 \end{aligned}$$

y resolviendo se obtiene que $n = 3$ satisface la ecuación.

3. Suponga que se tiene una canasta con 6 manzanas, 7 peras y 10 plátanos. Si se extraen 4 frutas al azar sin reemplazo, determine

   (a) La probabilidad de extraer 2 manzanas, 1 pera y 1 plátano

   (b) La probabilidad de extraer 2 manzanas o 2 peras o ambas

   (c) **Propuesto:** ¿Como cambia el ejercicio si ahora las extracciones son con reemplazo?

   (a) Nos interesa que 2 manzanas caigan dentro del grupo de las 6, que 1 pera caiga dentro del grupo de las peras, y 1 plátano dentro de los 10 plátanos. Como las extracciones son sin reemplazo, se tiene que la probabilidad pedida es

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{7}{1}\binom{10}{1}}{\binom{23}{4}} = 0.1185771$$

(b) Si definimos $A =$ se extraen 2 manzanas, $B =$ se extraen 2 peras, se pide $P(A \cup B)$. Entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donde

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{1}\binom{10}{1}}{\binom{23}{4}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{0}\binom{10}{2}}{\binom{23}{4}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{0}}{\binom{23}{4}} = 0.2303783$$

$$P(B) = \frac{\binom{6}{1}\binom{7}{2}\binom{10}{1}}{\binom{23}{4}} + \frac{\binom{6}{0}\binom{7}{2}\binom{10}{2}}{\binom{23}{4}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{0}}{\binom{23}{4}} = 0.284585$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{0}}{\binom{23}{4}} = 0.03557312$$

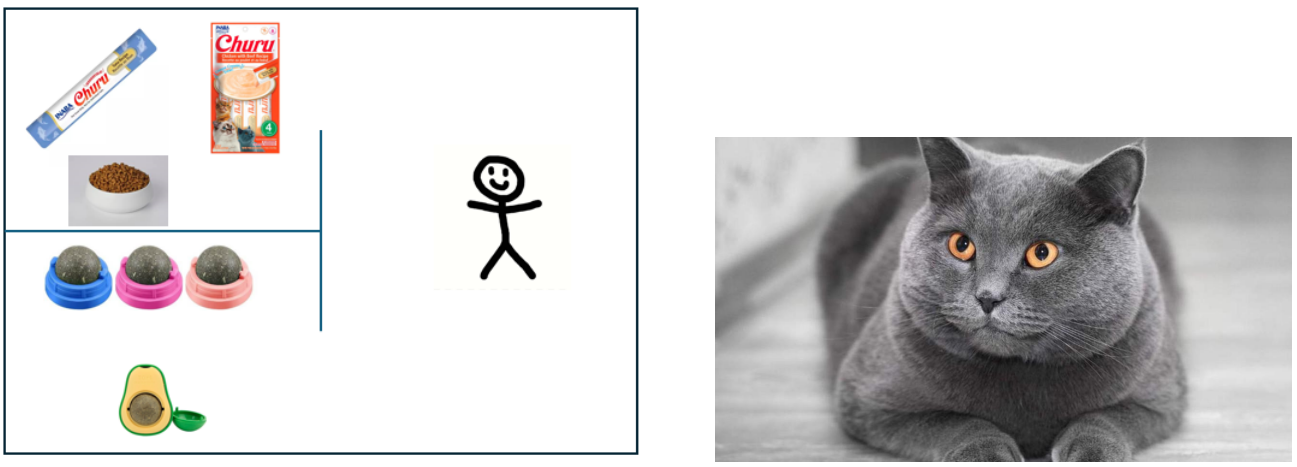
Luego,

$$P(A \cup B) = 0.2303783 + 0.284585 - 0.03557312 = 0.4793902$$

4. Suponga que se realiza un experimento donde es de interés analizar el comportamiento de los gatos. En particular se sitúa a cada gato participante en un laberinto, donde en una habitación está su dueño, en otra hay bolas de Catnip, y en otra hay un plato contundente de su comida favorita. El experimento consiste en dejar al gato en alguna habitación y luego dejarlo decidir a cual habitación ir. En base a esto se evidenció que

   - Si el gato está con su dueño, entonces tiene probabilidad de 4/7 de ir a por su comida y de 2/7 de ir a por el Catnip.
   - Si el gato está con el Catnip, entonces elige de manera equiprobable si ir con su dueño o quedarse con el Catnip.
   - Si el gato está en la comida, entonces con probabilidad 1 se va con su dueño.

   La figura 1 intenta mostrar el contexto.



(a) Laberinto (b) Gato

Figure 1: Ilustración didáctica del experimento

(a) Si inicialmente el gato se sitúa de manera aleatoria y equiprobable en alguna habitación ¿Cual es la probabilidad de vaya a por el Catnip?

(b) ¿Cual es la probabilidad de que el gato se haya situado inicialmente con su dueño, dado que eligió ir a por el Churu?

(c) Si se analizan 10 gatos ¿Cuál es la probabilidad de que 4 de ellos vayan a por el Catnip?

(a) Definamos los siguientes eventos

$$\begin{aligned} D_i &= \text{ Inicialmente está con su dueño} \\ A_i &= \text{ Inicialmente está con la comida} \\ C_i &= \text{ Inicialmente está con el Catnip} \\ D_L &= \text{ Pasa a estar con su dueño} \\ A_L &= \text{ Pasa a estar con la comida} \\ C_L &= \text{ Pasa a estar con el Catnip} \end{aligned}$$

Por enunciado se tiene

$$\begin{aligned} P(A_L|D_i) &= 4/7 \\ P(C_L|D_i) &= 2/7 \\ P(D_L|D_i) &= 1/7 \\ P(D_L|C_i) &= 1/2 \\ P(C_L|C_i) &= 1/2 \\ P(D_L|A_i) &= 1 \end{aligned}$$

Se pide $P(C_L)$, condicionando según en la habitación que se sitúa se tiene

$$\begin{aligned} P(C_L) &= P(C_L|D_i)P(D_i) + P(C_L|A_i)P(A_i) + P(C_L|C_i)P(C_i) \\ &= 2/7 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 \\ &= 11/42 \end{aligned}$$

(b) Se pide $P(D_i|A_L)$, entonces

$$\begin{aligned} P(D_i|A_L) &= \frac{P(A_L|D_i)P(D_i)}{P(A_L)} \\ &= \frac{4/7 \cdot 1/3}{P(A_L|D_i)P(D_i) + P(A_L|A_i)P(A_i) + P(A_L|C_i)P(C_i)} \\ &= \frac{4/7 \cdot 1/3}{4/7 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) Se puede usar el modelo binomial, con $p = 11/42$, y nos interesa que de los 10 gatos, 4 de ellos cumplan lo pedido. Entonces la probabilidad pedida corresponde a

$$\binom{10}{4} \left(\frac{11}{42}\right)^4 \left(1 - \frac{11}{42}\right)^6 = 0.1597597$$

5. Se lanza un dado con tres caras enumerado del 4 al 6. Se considera la sigma álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{4\}, \{5,6\}\}$. Decida si X, Y son o no variables aleatorias con respecto de $\mathcal{A}$, donde

$$X(\omega) = \omega$$
$$Y(\omega) = 4(\omega - 5.5)^2 + 1$$

para todo $\omega \in \Omega$.

Una definición alternativa de v.a es que la imagen inversa de ω exista en la sigma álgebra. Para corroborar lo pedido podemos hacer una tabla para X

ω	4	5	6
$X(\omega)$	4	5	6

Se tiene entonces

$$X(4) = 4 \Rightarrow X^{-1}(4) = \{4\} \in \mathcal{A}$$
$$X(5) = 5 \Rightarrow X^{-1}(5) = \{5\} \notin \mathcal{A}$$
$$X(6) = 6 \Rightarrow X^{-1}(6) = \{6\} \notin \mathcal{A}$$

Luego, como la imagen inversa de dos elementos no están en $\mathcal{A}$, se concluye que X no es variable aleatoria. Por otro lado

ω	4	5	6
$Y(\omega)$	$4(4-5.5)^2+1$	$4(5-5.5)^2+1$	$4(6-5.5)^2+1$

o que es lo mismo

ω	4	5	6
$Y(\omega)$	10	2	2

Entonces

$$Y(4) = 10 \Rightarrow Y^{-1}(10) = \{4\} \in \mathcal{A}$$
$$Y(5) = 2 \Rightarrow Y^{-1}(2) = \{5\}$$
$$Y(6) = 2 \Rightarrow Y^{-1}(2) = \{6\}$$

Note que $Y^{-1}(2) = \{5,6\} \in \mathcal{A}$. Luego, $Y(\omega)$ si es una sigma álgebra.