PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Andrés Díaz - Daniel Gálvez
Segundo semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 3

1. Se lanza un dado dos veces.

   (a) Defina un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

   (b) Calcule la probabilidad de que la suma de ambos dados sea 8.

   (c) Defina los eventos

   $$A = \text{La suma de ambos dados es 8, cuando salen uno o dos primos}$$
   $$B = \text{La suma de ambos dados es 8, cuando salen dos pares}$$

   Calcula la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos eventos.

   (a) El espacio muestral corresponde a

   $$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

   Podemos tomar la $\sigma-$algebra como el conjunto potencia

   $$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

   y la medida de probabilidad como

   $$P(\omega) = \frac{1}{36}, \quad \forall \omega \in \Omega$$

   ya que cada elemento del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ser elegido.

   (b) Para esto usamos casos favorables y totales. Definamos el evento

   $$A = \text{La suma de ambos dados es 8}$$

   Nos interesa $P(A)$. Los casos totales son

   $$N(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$$

   y los casos favorables favorables

   $$N(A) = \{\{6,2\},\{2,6\},\{4,4\},\{5,3\},\{3,5\}\} = 5$$

   Luego,

   $$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

(c) Se pide $P(A \cup B)$. Veamos las posibilidades de cada evento. Recordando que los primos son $2, 3, 5, 7, ...$ se tiene

$$A = \{\{2,6\},\{6,2\},\{3,5\},\{5,3\}\}$$
$$B = \{\{2,6\},\{6,2\},\{4,4\}\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} - \frac{2}{36} \\ &= 5/36 \end{aligned}$$

2. Suponga que en una canasta hay 7 manzanas, de las cuales 3 son verdes y el resto rojas. Se extraen 5 manzanas al azar. Defina el evento $A =$ se extraen 2 manzanas rojas. Determine $P(A)$,

(a) cuando las extracciones son con reemplazo

(b) cuando las extracciones son sin reemplazo

(a) Usemos casos totales y favorables. Primero notemos que se tiene

- 7 manzanas
  - 3 verdes
  - 4 rojas
- 5 extracciones

Ahora, note que las extracciones son con reemplazo. Entonces

$$N(\Omega) = 7^5$$

Por otro lado

$$N(A) = \binom{5}{2} \cdot 4^2 \cdot 3^3$$

Esto ya que se quiere extraer una bola roja, hay 4 posibilidades, luego, como es con reemplazo nuevamente hay 4 posibilidades, y lo mismo para las tres verdes, además note que no nos importa el orden, por lo cual hay $\binom{5}{2}$ de combinaciones posibles en que salen las 2 rojas. Entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{\binom{5}{2} \cdot 4^2 \cdot 3^3}{7^5} \\ &= \binom{5}{2} \frac{4^2 \cdot 3^3}{7^5} \\ &= \binom{5}{2} \frac{4^2 \cdot 3^3}{7^2 \cdot 7^3} \\ &= \binom{5}{2} \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(\frac{3}{7}\right)^3 \\ &= \binom{5}{2} \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{7}\right)^{5-2} \\ &= 0.2570358 \end{aligned}$$

(b) En este caso cambian las cosas. Pues

$$N(\Omega) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

por otro lado

$$N(A) = \binom{5}{2} (4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$$

Esto ya que primero hay 4 manzanas rojas, si se extrajo una roja entonces solo hay 3 posibilidades, y lo mismo para las tres manzanas. Además como no nos importa el orden hay $\binom{5}{2}$ formas en que salen las 2 rojas. Luego,

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\
&= \frac{\binom{5}{2} (4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \\
&= \frac{5!}{3!2!} 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \\
&= \frac{5!}{3!2!} 4 \cdot 3 \cdot 3! \cdot \frac{2!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!} \\
&= \frac{5!}{3!2!} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \cdot 3! \cdot \frac{2!}{7!} \\
&= \frac{5!}{3!2!} \frac{4!}{2!} \cdot 3! \cdot \frac{2!}{7!} \\
&= \binom{4}{2} \frac{5!}{3!2!} 3! \frac{2!}{7!} \\
&= \binom{4}{2} \frac{3!}{3!} \frac{1}{\frac{7!}{5!2!}} \\
&= \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{3}}{\binom{7}{5}} \\
&= 0.2857143
\end{aligned}$$

3. Un número de cuatro dígitos es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el numero líder sea mayor que el segundo dígito, que el segundo sea mayor que el tercero, y que el tercero sea mayor que el cuarto dígito?

   - Nota: El numero líder de un grupo es siempre distinto de 0.
   - Hint: ¿Realmente importa el orden en que se seleccionen los dígitos?

   Si definimos

   $A =$ El primer dígito sea estrictamente mayor que su segundo dígito, su segundo dígito sea estrictamente mayor que su tercer dígito, y su tercer dígito sea estrictamente mayor que su cuarto dígito

   Para comprender esto usemos el hint. Note que en realidad da igual como se seleccionen los números, pues luego al ordenarlos de mayor a menor se cumple lo pedido. Entonces

$$\#\text{casos totales} = 9 \cdot 10^3$$

ya que un dígito puede ser $1, 2, 3, ..., 9$, pero no 0. Y los restantes puede ser cualquiera de $0, 1, ..., 9$. Por otro lado,

$$\#\text{casos favorables} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{10}{4}$$

ya que nos interesa que no se repitan los números, y claramente el orden no importa, pues luego se ordenan. Luego,

$$P(A) = \frac{\binom{10}{4}}{9 \cdot 10^3} = 0.02333$$

4. Un hombre posee cinco monedas, dos de las cuales tienen dos caras de cara, una tiene dos caras de cruz, y dos son normales. Cierra los ojos, elige una moneda al azar y la lanza.

   (a) ¿Cual es la probabilidad de que haya salido cara?

   (b) Si el hombre abre sus ojos y visualiza una cara ¿Cual es la probabilidad de que el otro lado de la moneda sea también cara?

   (a) Si definimos

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{se elige moneda con 2 caras} \\ A_2 &= \text{se elige moneda con 2 sellos} \\ A_3 &= \text{se elige moneda común} \\ C &= \text{sale cara en el lanzamiento} \\ S &= \text{sale sello en el lanzamiento} \end{aligned}$$

   note además que

$$P(A_1) = 2/5, \quad P(A_2) = 1/5, \quad P(A_3) = 2/5$$

   Nos piden $P(C)$. Condicionando según la moneda que salio se tiene

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) + P(C|A_3)P(A_3) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \\ &= 3/5 \end{aligned}$$

   (b) Si definimos

$$\begin{aligned} A &= \text{Se obtiene cara en parte superior de la moneda} \\ B &= \text{Se obtiene cara en la parte inferior de la moneda} \end{aligned}$$

   Nos piden $P(B|A)$, entonces

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B \cap A)}{P(C)} \\ &= \frac{2/5}{3/5} \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

5. La fábrica A produce el 65% de una marca especial de chips con una tasa de defectuosos del 6%. La fábrica B produce el 35% restante de los mismos chips con una tasa de defectuosos del 5%.

   (a) ¿Cuál es la tasa de defectuosos de un chip seleccionado al azar de esta marca de este producto?

   (b) Dado que un chip de esta marca es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica A?

   (a) Definamos

$$\begin{aligned} D &= \text{Chip defectuoso} \\ A &= \text{Chip fabricado por } A \\ B &= \text{Chip fabricado por } B \end{aligned}$$

   con

$$P(A) = 0.65, \quad P(B) = 0.35, \quad P(D|A) = 0.06, \quad P(D|B) = 0.05$$

   Nos piden $P(D)$, condicionando según la fabrica se tiene

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) \\ &= 0.06 \cdot 0.65 + 0.05 \cdot 0.35 \\ &= 0.0565 \end{aligned}$$

   (b) Se pide $P(A|D)$, entonces

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(A \cap D)P(A)}{P(A)P(D)} \\ &= \frac{P(D \cap A)P(A)}{P(A)P(D)} \\ &= \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.06 \cdot 0.65}{0.0565} \\ &= 0.69 \end{aligned}$$