PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO
AYUDANTES: ANDRÉS DÍAZ - DANIEL GÁLVEZ
SEGUNDO SEMESTRE 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 1

1. Demuestre las siguientes igualdades.

   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

   (b) $A^c - B^c = B - A$

   (c) $A \cap B^c = A - (A \cap B)$

   (d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$

   (e) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

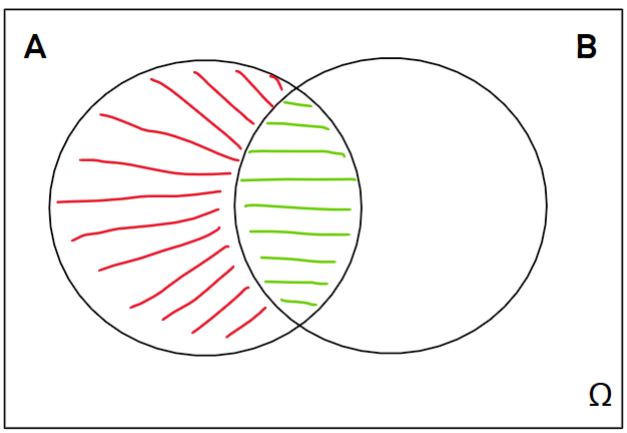
   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

   Para esto vamos a utilizar que $A \cap \Omega = A$ y $B \cup B^c = \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \end{aligned}$$

   A continuación se presenta una imagen de lo anterior. Donde

   - $A \cap B$
   - $A \cap B^c$

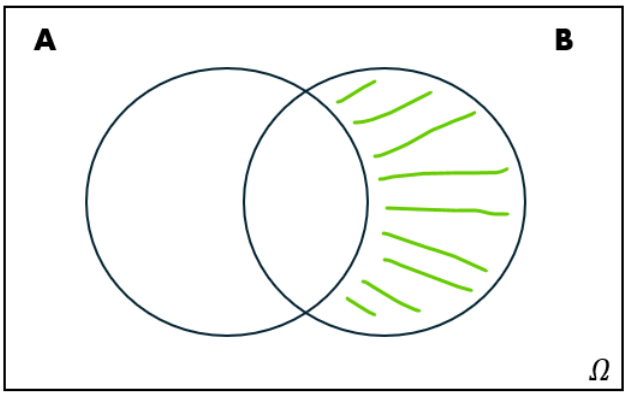


(b) $A^c - B^c = B - A$

Recuerde que por definición $A - B = A \cap B^c$. Entonces

$$\begin{aligned} A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c \\ &= A^c \cap B \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A \end{aligned}$$

A continuación se presenta una imagen de lo anterior.

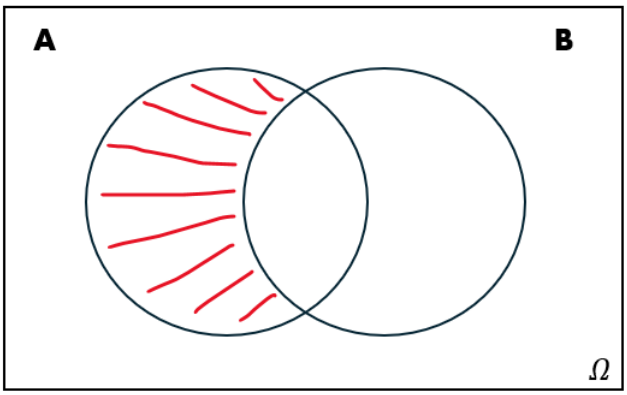


(c) $A \cap B^c = A - (A \cap B)$

En este ocasión vamos a empezar del lado derecho. Si aplicamos la definición al igual que antes tenemos que

$$\begin{aligned} A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

A continuación se presenta una imagen de lo anterior.



(d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$
Desarrollamos el lado derecho

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap \Omega \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

(e) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
Desarrollamos el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

Queda propuesto el como representar esta propiedad en diagramas de Venn.

2. Se lanza un dado n veces. El evento "En el i-ésimo lanzamiento sale 2" será denotado por A_i , con $i = 1, ..., n$. Describa los siguientes eventos usando los conjuntos A_i y las operaciones usuales entre eventos;

   (a) $B =$ "En ninguno de los n lanzamientos sale 2".

   (b) $C =$ "En al menos un lanzamiento sale 2".

   (c) $D =$ "En exactamente un lanzamiento sale 2".

   (d) $E =$ "En a lo más en un lanzamiento sale 2".

   (a) Queremos que en el primer lanzamiento no salga el 2 **y** que en el segundo lanzamiento no salga el 2 **y** que en el tercer lanzamiento no salga el 2, y así sucesivamente hasta el $n-$esimo lanzamiento. El evento A_i^c denota que en el $i-$esimo lanzamiento no sale 2, por lo que lo pedido se escribe de la siguiente manera

$$B = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

   (b) Vamos a aprovechar lo utilizado anteriormente, pues si tomamos complemento se tiene que

$$C^c = \text{"En ninguno de los } n \text{ lanzamiento sale 2"}$$

   De modo que

$$C^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

   Si tomamos nuevamente complemento se tiene

$$\begin{aligned} (C^c)^c &= (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c)^c \\ C &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \end{aligned}$$

   Por lo que el evento C se escribe de la siguiente manera

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

(c) Esto puede suceder de varias maneras, pues puede ser que en el primer lanzamiento salga 2 pero no en los demás, **o** puede ser que en el segundo lanzamiento salga 2, **o** puede ser que en el tercer lanzamiento salga 3, y así sucesivamente, de modo que podemos escribir el evento D de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D &= (A_1 \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n^c) \cup \cdots \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{j \neq i}^{n} A_i \cap A_j^c \right) \end{aligned}$$

(d) Esto puede suceder de dos maneras, o no sale ningún 2, o sale exactamente un 2. Considerando los eventos previos, podemos escribir el evento E de la siguiente manera

$$E = D \cup E$$

3. Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Decida si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son o no $\sigma-$algebra, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\} \\ \mathcal{G} &= \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\} \end{aligned}$$

Propuesto: Muestre que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ no es una $\sigma-$algebra pero $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ si lo es.

Recordemos que una $\sigma-$algebra debe cumplir lo siguiente

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Entonces debemos ir corroborando todo esto. Vamos con $\mathcal{F}$.

- Claramente $\Omega \in \mathcal{F}$, pues $\Omega = \{a, b, c\}$, y esto efectivamente pertenece a $\mathcal{F}$.
- Vamos elemento por elemento

$$\begin{aligned} A = \Omega \in \mathcal{F} \ &\Rightarrow \ A^c = \emptyset \in \mathcal{F} \\ A = \{a\} \in \mathcal{F} \ &\Rightarrow \ A^c = \{b, c\} \notin \mathcal{F} \end{aligned}$$

  Note que el complemento de $\{a\}$ no pertenece a $\mathcal{F}$, por lo que no se cumple la propiedad 2, concluyendo así que $\mathcal{F}$ no es una $\sigma-$algebra.

Vamos por $\mathcal{G}$.

- Claramente $\Omega \in \mathcal{G}$.
- Vamos elemento por elemento

$$\begin{aligned} A = \Omega \in \mathcal{G} \ &\Rightarrow \ A^c = \emptyset \in \mathcal{G} \\ A = \{a, b\} \in \mathcal{G} \ &\Rightarrow \ A^c = \{c\} \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

  Se cumple la propiedad.

- Es fácil ver que todas las uniones existen en $\mathcal{G}$, algunos casos particulares son

$$\begin{aligned} A_1 = \{a,b\}, A_2 = \{\emptyset\} &\Rightarrow A_1 \cup A_2 = \{a,b\} \in \mathcal{G} \\ A_1 = \{a,b\}, A_2 = \emptyset, A_3 = \{c\} &\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a,b,c\} \in \mathcal{G} \\ A_1 = \Omega, A_2 = \emptyset, A_3 = \{c\} &\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega \in \mathcal{G} \\ A_1 = \{a,b\}, A_2 = \{c\} &\Rightarrow A_1 \cup A_2 = \{a,b,c\} \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{G}$ es una $\sigma-$algebra.

4. Sea $\mathcal{F}_i, i = 1,2,3$, $\sigma-$álgebras de subconjuntos de Ω tales que $\mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

   (a) ¿Es $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ una $\sigma-$álgebra?

   (b) ¿Es $\mathcal{F}_3 \cap (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$ una $\sigma-$álgebra?

   (c) ¿Es $\mathcal{F}_1 \cap (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3)$ una $\sigma-$álgebra?

   (a) Si definimos $\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, note que

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$$

   ya que $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Luego, como $\mathcal{F}_1$ es una $\sigma-$algebra, se concluye que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ también lo es.

   (b) Si definimos $\mathcal{G}_2$, note que

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{F}_3 \cap (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) = \emptyset$$

   Luego, $\mathcal{F}_3 \cap (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$ no es una $\sigma-$álgebra.

   (c) Si definimos $\mathcal{G}_3 = \mathcal{F}_1 \cap (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3)$, note que

$$\mathcal{G}_3 = \mathcal{F}_1 \cap (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3) = \mathcal{F}_2$$

   Luego, como $\mathcal{F}_2$ es una $\sigma-$algebra, se concluye que $\mathcal{F}_1 \cap (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3)$ también lo es.

5. Sea Ω un espacio muestral dado y sea $A_1, A_2, \ldots, A_k$ una secuencia infinita de eventos.

   (a) Muestre que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$, donde $B_i = A_i - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{i-1}), i = 2,3,...,k$ y $B_1 = A_1$.

   (b) Con lo anterior deduzca que $B_i \cap B_j = \emptyset$ y además $B_i \subseteq A_i$ para todo i, j.

   (a) Para mostrar esto procederemos mediante un dibujo. Primero se tiene que $B_1 = A_1$. Ahora, si tenemos $A_2 \cup A_2$, esto corresponde a la figura 1, donde claramente

$$A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$$

   y además

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \end{aligned}$$

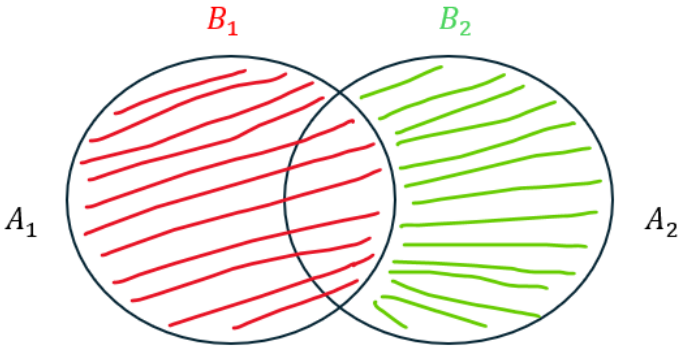


Figure 1: $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$

Siguiendo la misma idea ahora podemos hacer lo mismo con $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, esto corresponde a la figura 2.

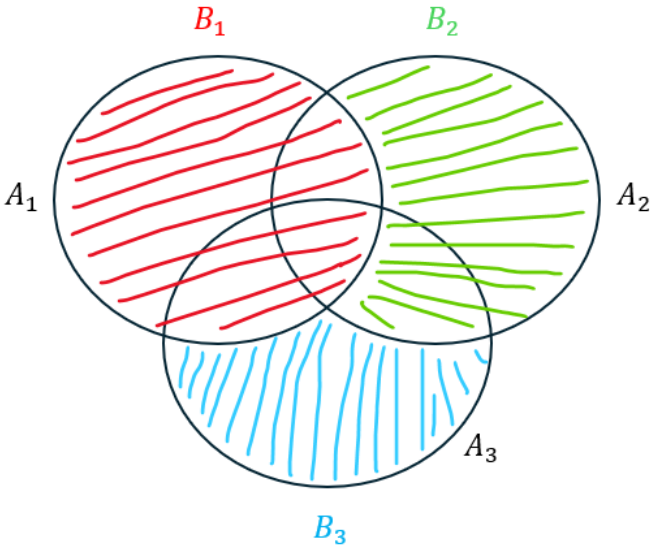


Figure 2: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

donde claramente

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

y además

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

Y a partir de acá ya es fácil ver que en general

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_i &= A_i - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{i-1}), \quad i = 2, 3, ..., k \end{aligned}$$

(b) A partir de las imágenes anteriores es posible ver que B_i, B_j no tienen elementos en común, por lo que se cumple que

$$B_i \cap B_j = \emptyset$$

Por otro lado, también es posible ver que B_i está contenido en A_i, por ejemplo, en la figura 1 es fácil ver que $B_2 \subseteq A_2$, o en la figura 2 se puede ver que $B_3 \subseteq A_3$, por lo que en general se cumple

$$B_i \subseteq A_i$$