PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Andrés Díaz - Daniel Gálvez
Segundo semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 6

1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - k(1-x) & \text{si } 0 \leq x < k \\ 1 & \text{si } x \geq k \end{cases}$$

   a) Determine las restricciones que debe cumplir k para que $F(x)$ sea una función de distribución. Indique a qué tipo de distribución corresponde X.

   b) Calcule $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq k\right)$.

2. Verifique que para todo k entero positivo, la función F definida por:

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j e^{-x}}{j!}, \quad x > 0,$$

   es una función de distribución acumulada de cierta variable aleatoria.

3. Un mazo contiene n cartas numeradas del 1 al n. Una persona escoge una carta al azar y la devuelve al mazo. Luego, escoge otra carta del mazo, la devuelve, y continúa así hasta obtener una misma carta por segunda vez. Sea X el número total de extracciones hasta obtener la repetición. Determine el soporte de X, calcule la $P(X > k)$, y use este resultado para obtener la distribución de X (función de probabilidad discreta).

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   Indique si alguna de las siguientes afirmaciones es verdadera. Justifique sus respuestas dando argumentos sólidos.

   a) X y $-X$ tienen la misma distribución.

   b) $P(X > 0) = 1/2$.

   c) $\mathbb{E}(X) = 0$.

   d) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2)$.