PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Andrés Díaz - Daniel Gálvez
Segundo semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 5

1. Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde

$$\Omega = \mathbb{R}^+$$
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, (0,\infty), (0,1/4), [1/4,\infty)\}$$
$$P(A) = \frac{2}{\pi}\int_A \frac{1}{1+x^2}dx, \quad A \in \mathcal{A}$$

   (a) Muestre que $\mathcal{A}$ es efectivamente una $\sigma-$álgebra

   (b) Muestre que P es una medida de probabilidad

   (c) Si ahora se define

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, (0,\infty), [1/2,\infty)\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,\infty)\}$$

   ¿Son $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathcal{F}$?

2. Consideremos familias con n hijos, donde $n \geq 2$. Sea A el evento de que una familia tiene hijos de ambos sexos, y sea B el evento de que hay como máximo una niña en la familia. Demuestre que el único valor de n para el cual los eventos A y B son independientes es $n = 3$, asumiendo que cada niño tiene una probabilidad de $1/2$ de ser varón.

3. Suponga que se tiene una canasta con 6 manzanas, 7 peras y 10 plátanos. Si se extraen 4 frutas al azar sin reemplazo, determine

   (a) La probabilidad de extraer 2 manzanas, 1 pera y 1 plátano

   (b) La probabilidad de extraer 2 manzanas o 2 peras

   (c) **Propuesto:** ¿Como cambia el ejercicio si ahora las extracciones son con reemplazo?

4. Suponga que se realiza un experimento donde es de interés analizar el comportamiento de los gatos. En particular se sitúa a cada gato participante en un laberinto, donde en una habitación está su dueño, en otra hay bolas de Catnip, y en otra hay un plato contundente de su comida favorita. El experimento consiste en dejar al gato en alguna habitación y luego dejarlo decidir a cual habitación ir. En base a esto se evidenció que

   - Si el gato está con su dueño, entonces tiene probabilidad de $4/7$ de ir a por su comida y de $2/7$ de ir a por el Catnip.
   - Si el gato está con el Catnip, entonces elige de manera equiprobable si ir con su dueño o quedarse con el Catnip.
   - Si el gato está en la comida, entonces con probabilidad 1 se va con su dueño.

   La figura 1 intenta mostrar el contexto.



(a) Laberinto



(b) Gato

Figure 1: Ilustración didáctica del experimento

(a) Si inicialmente el gato se sitúa de manera aleatoria y equiprobable en alguna habitación ¿Cual es la probabilidad de vaya a por el Catnip?

(b) ¿Cual es la probabilidad de que el gato se haya situado inicialmente con su dueño, dado que eligió ir a por el Churu?

(c) Si se analizan 10 gatos ¿Cuál es la probabilidad de que 4 de ellos vayan a por el Catnip?

5. Se lanza un dado con tres caras enumerado del 4 al 6. Se considera la sigma álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{4\}, \{5, 6\}\}$. Decida si X, Y son o no variables aleatorias con respecto de $\mathcal{A}$, donde

$$X(\omega) = \omega$$
$$Y(\omega) = 4(\omega - 5.5)^2 + 1$$

para todo $\omega \in \Omega$.