PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Andrés Díaz - Daniel Gálvez
Segundo semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Ayudantía 12

1. Sean $X_1, \ldots, X_n$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) Exp(λ), es decir, con f.d.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Usando función generadora de momentos (f.g.m.), pruebe que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Encuentre el valor esperado y la f.g.m. de $Z = (X + Y)/2$.

   (b) Encuentre el valor esperado de XY.

3. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con f.d. dada por:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1, x_2 < 1, \\ 0, & \text{e.o.c..} \end{cases}$$

   (a) Encuentre las f.d. marginales de X_1 y de X_2.

   (b) ¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias independientes?

   (c) Sea $Y_1 = X_1/X_2$ e $Y_2 = X_1X_2$. Encuentre la covarianza entre Y_1 e Y_2.

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 24x^2/y^3, & 0 < x < 1,\ y > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Calcule $P(X < 1/2 \mid Y > 6)$.

   (b) Encuentre las funciones de densidad marginales de X e Y.

   (c) Calcule $\rho_{XY} = \text{Correlación}(X, Y)$.