Departamento de Estadística PUC

Interrogación 3: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Pregunta 1: Sean X e Y variables aleatorias con función densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } \ 0 < y < x < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Obtenga las densidades marginales de X e Y, y discuta si X e Y son independientes.

$$x > 0 \Longrightarrow f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = e^{-x} \left(y \big|_0^x \right) = x e^{-x}.$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} x e^{-x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \Longrightarrow X \sim Gamma(2,1).$$

Similarmente,

$$y > 0 \Longrightarrow f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \big|_y^\infty = e^{-y}.$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \Longrightarrow Y \sim \exp(1).$$

(b) Obtenga la función generadora de momentos de $X - Y$.

$$\begin{aligned} M_{X-Y}(t) &= E(e^{t(X-Y)}) \\ &= \int_0^\infty \int_0^x e^{t(x-y} e^{-x} dy dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(1-t)x} \int_0^x e^{-ty} dy dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(1-t)x} \left(-\frac{1}{t} e^{-ty} \big|_0^x \right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(1-t)x} \left(\frac{1 - e^{-tx}}{t} \right) dx \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^\infty e^{-(1-t)x} dx - \int_0^\infty e^{-(1-t)x - tx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{1-t} \underbrace{\int_0^\infty (1-t) e^{-(1-t)x} dx}_{=1 \text{ si } 1-t>0} - \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}_{=1} \right\} \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{1-t} - 1 \right\} = (1-t)^{-1}, \text{ si } t < 1 \Longleftrightarrow X - Y \sim \exp(1). \end{aligned}$$

(c) Calcule la covarianza entre Y y $X-Y$.

$$\begin{aligned}
Cov(Y, X-Y) &= E\{Y(X-Y)\} - E(Y)E(X-Y) \\
&= E(YX) - E(Y^2) - E(Y)E(X-Y).
\end{aligned}$$

$$(a) \Longrightarrow \begin{cases}
E(Y) = \int_0^\infty \int_0^x y e^{-x} dy dx \\
= \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^x\right) dx \\
= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{2}\Gamma(3) = 1; \\
E(Y^2) = \int_0^\infty \int_0^x y^2 e^{-x} dy dx \\
= \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{1}{3}y^3\Big|_0^x\right) dx \\
= \frac{1}{3}\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \frac{1}{3}\Gamma(4) = 2; \\
E(YX) = \int_0^\infty \int_0^x yx e^{-x} dy dx \\
= \int_0^\infty x e^{-x} \left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^x\right) dx \\
= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \frac{1}{2}\Gamma(4) = 3;
\end{cases}$$

$$(b) \Longrightarrow E(X-Y) = \frac{dM_{X-Y}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = (1-t)^{-2}\Big|_{t=0} = 1 \text{ (también se puede usar (a))}$$

$$\Longrightarrow Cov(Y, X-Y) = E(YX) - E(Y^2) - E(Y)E(X-Y) = 3 - 2 - 1 \times 1 = 0.$$

(*Recuerde que:* $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}\ \forall \alpha, \lambda > 0;\ \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!\ si\ \alpha \in \mathbb{N}$.)

Pregunta 2: Sean $U = X + Y$ y $V = X - Y$, donde X e Y son variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y función generadora de momentos:

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Obtenga el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas del vector $\mathbf{Z} = (U, V)^\top$.

Primero note que $E(X) = E(Y) = \mu$, $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$ y $Cov(X, Y) = 0$ por independencia. Además, $E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2 + \mu^2$, pues $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 \Longrightarrow E(Z^2) = Var(Z) + E(Z^2)$.

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{Z}) &= \begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X+Y) \\ E(X-Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X)+E(Y) \\ E(X)-E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 0 \end{pmatrix}; \\
Var(\mathbf{Z}) &= \begin{pmatrix} Var(U) & Cov(U,V) \\ Cov(V,U) & Var(V) \end{pmatrix}, \quad \text{donde :} \\
Var(U) &= Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \\
&= Var(X) + Var(Y) = 2\sigma^2, \\
Var(V) &= Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) \\
&= Var(X) + Var(Y) = 2\sigma^2,, \\
Cov(U,V) &= E\{(X+Y)(X-Y)\} - E(X+Y)E(X-Y) \\
&= E\{(X+Y)(X-Y)\} \text{ pues } E(X-Y) = 0 \\
&= E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = 0 \text{ pues } E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2 + \mu^2
\end{aligned}$$

$$\implies Var(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 \end{pmatrix} = 2\sigma^2 \mathbf{I}_2.$$

(b) Encuentre la función generadora de momentos conjunta de U y V, es decir:

$$M_{U,V}(t,s) = \mathrm{E}(e^{tU+sV}).$$

$$\begin{aligned}
M_{U,V}(t,s) &= E(e^{tU+sV}) \\
&= E(e^{t(X+Y)+s(X-Y)}) \\
&= E(e^{(t+s)X+(t-s)Y}) \\
&= E(e^{(t+s)X})E(e^{(t-s)Y}) \text{ por independencia} \\
&= M_X(t+s)M_X(t-s) \\
&= e^{\mu(t+s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t+s)^2} e^{\mu(t-s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)^2} \\
&= e^{\mu(t+s)+\mu(t-s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t+s)^2+\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)^2} \\
&= e^{2\mu t+\frac{1}{2}(2\sigma^2)(t^2+s^2)}.
\end{aligned}$$

(c) ¿Son U y V variables aleatorias indepedientes? Justifique!

$$\begin{aligned}
(a) \implies & \begin{cases} M_U(t) = M_{U,V}(t,0) = e^{2\mu t+\frac{1}{2}(2\sigma^2)t^2} \ (\iff U \sim N(2\mu, 2\sigma^2)) \\ M_V(s) = M_{U,V}(0,s) = e^{\frac{1}{2}(2\sigma^2)s^2} \ (\iff V \sim N(0, 2\sigma^2)) \end{cases} \\
\implies & M_{U,V}(t,s) = M_U(t)M_V(s) \ \forall (t,s) \iff U \text{ y } V \text{ son independientes}
\end{aligned}$$

Pregunta 3: Suponga que el ancho (X) y el largo (Y) de una placa rectangular son variables aleatorias con función densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{si } 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Calcule el ancho esperado y el largo esperado de la placa.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \int_x^1 8x^2 y dy dx = \int_0^1 4x^2 \int_x^1 2y dy dx = \int_0^1 4x^2 \left(y^2 \big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2) dx \\
&= \int_0^1 4x^2 dx - \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}; \\
E(Y) &= \int_0^1 \int_0^y 8xy^2 dx dy = \int_0^1 4y^2 \int_0^y 2x dx dy = \int_0^1 4y^2 \left(x^2 \big|_0^y \right) dy = \int_0^1 4y^4 dy = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

(b) Calcule el área esperada de la placa.

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 8x^2y^2 dxdy = \int_0^1 8y^2 \left(\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^y \right) dy = \frac{8}{3} \int_0^1 y^5 dy = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

(c) Calcule la esperanza y varianza del perímetro de la placa

$$(a) \Longrightarrow E\{2(X+Y)\} = 2\{E(X) + E(Y)\} = 2\left(\frac{8}{15} + \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{3},$$

$$Var\{2(X+Y)\} = E\{4(X+Y)^2\} - E\{2(X+Y)\}^2 = E\{4(X+Y)^2\} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \quad \text{por (a)},$$

donde:

$$\begin{aligned} E\{4(X+Y)^2\} &= \int_0^1 \int_0^y 32(x+y)^2 xy dxdy \\ &= 32 \int_0^1 \int_0^y (x^3y + 2x^2y^2 + xy^3) dxdy = 32 \int_0^1 \int_0^y (x^3y + 2x^2y^2 + xy^3) dxdy \\ &= 32 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) y^5 dy = \frac{32}{6}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{68}{9} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow Var\{2(X+Y)\} = \frac{68}{9} - \frac{64}{9} = \frac{4}{9}.$$

– Santiago, 13 de Noviembre del 2023 –