Departamento de Estadística PUC

Interrogación 2: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arrellano-Valle

Pregunta 1: Sea X una variable aleatoria que mide la demora que experimenta un automovilista cuando se encuentra con la señal en rojo. Supoga que X tiene función de distribución acumulada dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1-(1-p)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

donde $0 \leq p < 1$.
(a) Calcule $\mathrm{P}(X=0)$, $\mathrm{P}(X=1)$ y $\mathrm{P}(X>1 \mid 2X>1)$.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= F_X(0) - F_X(0^-) = F_X(0) = 1-(1-p)e^{-0} = p, \\ P(X=1) &= F_X(1) - F_X(1^-) = 0, \\ P(X>1 \mid 2X>1) &= P(X>1 \mid X>\frac{1}{2}) = \frac{P(X>1, X>\frac{1}{2})}{P(X>\frac{1}{2})} = \frac{P(X>1)}{P(X>\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1-P(X\leq 1)}{1-P(X\leq \frac{1}{2})} = \frac{1-F_X(1)}{1-F_X(\frac{1}{2})} = \frac{1-(1-(1-p)e^{-1})}{1-(1-(1-p)e^{-\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{(1-p)e^{-1}}{(1-p)e^{-\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(b) Calcule la demora esperada por el automovilista.

X es una v.a. mixta, ya que $\mathrm{P}(X=0) = p \neq 0$ si $p \neq 0$. Para, $x>0$, X es continua, con densidad $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = (1-p)e^{-x}$. Luego,

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + \int_0^\infty x(1-p)e^{-x}dx = (1-p)\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1-p.$$

Como $X>0$ (c.p.1) también se puede usar que

$$E(X) = \int_0^\infty (1-F_X(x))dx = (1-p)\int_0^\infty e^{-x}dx = 1-p.$$

(c) Indique una mediana para la demora del automovilista.

Hay dos casos según el valor de p:
i) si $p \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow m = med(X) = 0$;
ii) si $p < \frac{1}{2} \Longrightarrow$ resolver : $F_X(m) = 1-(1-p)e^{-m} = \frac{1}{2} \Longrightarrow m = \log\{2(1-p)\}$.

Pregunta 2 Sea X una variable aleatoria continua con función densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Obtenga la función generadora de momentos de X.

$$\begin{aligned}
M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \times \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\{\int_{-\infty}^{0} e^{(1+t)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x}dx\} \\
&= \frac{1}{2}\{-\int_{\infty}^{0} e^{-(1+t)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x}dx\} = \frac{1}{2}\{\int_{0}^{\infty} e^{-(1+t)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x}dx\} \\
&= \frac{1}{2}\{\frac{1}{1+t}\int_{0}^{\infty}(1+t)e^{-(1+t)x}dx + \frac{1}{1-t}\int_{0}^{\infty}(1-t)e^{-(1-t)x}dx\} \\
&= \frac{1}{2}\{\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\} \quad (\text{si } \ |t|<1 \Longrightarrow \int_{0}^{\infty}(1\pm t)e^{-(1\pm t)x}dx = 1) \\
&= \frac{1}{1-t^2}, \quad |t|<1.
\end{aligned}$$

(b) Calcule el primer y segundo momento de X

$$\begin{aligned}
&M_X'(t) = 2t(1-t^2)^{-2} \Longrightarrow E(X) = M_X'(0) = 0, \\
&M_X''(t) = 2(1-t^2)^{-2} + 4t^2(1-t^2)^{-3} \Longrightarrow E(X^2) = M_X''(0) = 2
\end{aligned}$$

También pueden calcular $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \times \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$ para $k = 1, 2$.
(c) Pruebe que E$(|X|) = 1$ y calcule P$(|X| \leq 1)$.

$$\begin{aligned}
E(|X|) &= \int_{-\infty}^{\infty} 1|x| f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1|x| \times \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2} \times 2\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx \quad (\text{función par}) \\
&= \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = 1 \quad (E(Y),\ Y = |X| \sim \exp(1))
\end{aligned}$$

Algunos pueden probar primero que $Y = |X| \sim \exp(1)$ y concluir que $E(Y) = \int_0^\infty ye^{-y}dy = 1$.
$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1)) = \int_{-1}^{1} f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}dx$ (por simetría)$\Longrightarrow P(|X| \leq 1) = \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + e^{-0} = 1 - e^{-1}$.

Algunos pueden probar primero que $Y = |X| \sim \exp(1)$ y concluir que $P(|X| \leq 1) = P(Y \leq 1) = F_Y(1) = \int_0^1 e^{-y}dy$.

Pregunta 3: Sea X una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2; es decir, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, cuya función generadora de momentos está dada por

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Si $M_X(t) = e^{2t+2t^2}$, indique la distribución de X y calcule P$(X > 2)$.

Como $M_X(t) = e^{2t+\frac{1}{2}4t^2} \Longrightarrow X \sim N(2,4) \Longrightarrow E(X) = 2$
$\Longrightarrow P(X > 2) = P(X - 2 > 0) = \frac{1}{2}$, por la simetría con respecto a $E(X) = 2$
(b) Si $X \sim N(2,4)$, pruebe que $Z = \frac{1}{2}(X-2) \sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E(e^{tZ}) = E(e^{\frac{t}{2}(X-2)}) = E(e^{\frac{t}{2}X-t}) = E(e^{-t}e^{\frac{t}{2}X}) \\ &= e^{-t}E(e^{\frac{t}{2}X}) = e^{-t}M_X(t/2) = e^{-t}e^{t+\frac{1}{2}t^2} \quad (\text{por } (a)) \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \Longleftrightarrow Z \sim N(0,1). \end{aligned}$$

Algunos pueden trabajar con la transformación lineal $x \to z = (x-2)/2$ y usar que $f_Z(z) = |\frac{dg^{-1}(z)}{dz}| f_X(g^{-1}(z))$, donde $g^{-1}(z) = 2z + 2$ es la transformación inversa; o bien trabajarlo directamente de la FDA: $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\frac{1}{2}(X-2) \leq z) = P(X \leq 2z+2) = F_X(2z+2)$ y obtener el resultado anterior derivando con respectoa a z.
(c) Si $X \sim N(2,4)$, calcule $\mathrm{P}(|X-2| \geq 2)$ en términos de $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z)$, la función distribución acumulada de $Z \sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(|X-2| \geq 2) &= P(|Z| \geq 1) = 1 - P(|Z| \leq 1) = 1 - P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 1 - \Phi(1) + (1 - \Phi(1)) = 2 - 2\Phi(1), \end{aligned}$$

donde $\Phi(z) = F_Z(z)$, la FDA de $Z \sim N(0,1)$.

Indicaciones: Todas las respuestas deben estar claramente justificadas. El puntaje de cada pregunta es 6 puntos. El tiempo de duración máximo es dos horas y 15 minutos.

– Santiago, 12 de Octubre de 2023 –