PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos Probabilísticos - I1 - Pauta
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 1

Se lanzan simultáneamente dos dados honestos y distinguibles ($1y2$). Proponga un modelo de probabilidad en cada una de las siguientes situaciones:

a) Se observa el resultado de ambos dados.

Sol:

Espacio muestral: $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ (**1 punto**)

Sigma-álgebra: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (Conjunto Potencia) (**1 punto**)

Espacio de Probabilidad:

$$P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{N(\Omega)} \quad \forall (i,j) \in \Omega$$

$$\longrightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{36}N(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ (**1 punto**)}$$

El modelo de probabilidad es $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Se observa si ambos dados coiniciden o no.

Sol:

Espacio muestral: $0 =$ No coiniciden $1 =$ Coinciden $\Omega = \{0,1\}$ (**1 punto**)

Sigma-álgebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, \Omega\}$ (**1 punto**)

Espacio de Probabilidad:

$$P(\{1\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(\{0\}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ (**1 punto**)}$$

El modelo de probabilidad es $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Solución del Ejercicio 2

A: Llueve hoy,
B: Llueve mañana,
C: Llueve pasado mañana. (**1 punto**)
Tenemos
$P(B|A) = P(C|B) = 0.7$
$P(B|A^c) = P(C|B^c) = 0.4$ (**1 punto**)
Usando el teorema de probabilidades totales

$$\begin{aligned} P(C|A) &= P(C|AB)P(B|A) + P(C|AB^c)P(B^c|A) && \text{(**1.5 puntos**)} \\ &= P(C|B)P(B|A) + P(C|B^c)P(B^c|A) && \text{(**1.5 puntos**)} \\ &= (0.7)(0.7) + (0.4)(0.3) && \text{(**1 punto**)} \\ &= 0.49 + 0.12 \\ &= 0.61 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Un sistema C está formado por dos partes A y B. La parte A tiene tres componentes A_1, A_2 y A_3; mientras que la parte B tiene solo dos componentes B_1 y B_2. Cada una de estas partes funciona cuando todas sus componentes lo hacen; mientras que el sistema completo funciona si alguna de sus dos partes lo hace.
La probabilidad de que cada componente de A funcione es 0.90, y dichas componentes funcionan de manera independiente entre sí. Por otro lado, dado que A funciona, cada componente de B funciona con probabilidad 0.95; y dado que A no funciona, cada componente de B funciona con probabilidad 0.80. Además, dado que A funciona, las componentes B_1 y B_2 funcionan de manera independiente entre sí; lo mismo ocurre si A no funciona.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que A funcione?

Sol: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (**0.5 puntos**), independientes, y $P(A_i) = 0.9 \ \forall i = 1, 2, 3$ (**0.5 puntos**). Luego

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) && (\textbf{0.5 puntos}) \\ &= 0.9^3 && (\textbf{0.5 puntos}) \\ &= 0.729 \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que B funcione?

Sol: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ es partición (**0.5 puntos**) y $B = B_1 \cap B_2$.
Además, tenemos que $P(B_i|A) = 0.95$ y $P(B_i|A^c) = 0.8 \ \forall i = 1, 2$. Luego

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) && (\textbf{0.5 puntos}) \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(B_1 \cap B_2|A) \\ &= P(B_1|A)P(B_2|A) \\ &= 0.95^2 \\ P(B|A^c) &= P(B_1 \cap B_2|A^c) \\ &= P(B_1|A^c)P(B_2|A^c) \\ &= 0.8^2 && (\textbf{0.5 puntos}) \end{aligned}$$

Pues B_1 y B_2 son independientes condicionados a A y A^c. Luego

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= 0.95^2 \cdot 0.729 + 0.8^2 \cdot (1 - 0.729) && (\textbf{0.5 puntos}) \\ &= 0.8313625 \end{aligned}$$

Nota: B_1 y B_2 NO son independientes, pero sí lo son condicionados a A y A^c.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que C funcione?

Sol: Notemos que $C = A \cup B$ (**0.5 puntos**). Luego

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) && (\textbf{0.5 puntos}) \\ &= P(A) + P(B) - P(B|A)P(A) \\ &= P(A) + P(B|A^c)P(A^c) && (\textbf{0.5 puntos}) \\ &= 0.729 + 0.8^2(1 - 0.729) && (\textbf{0.5 puntos}) \\ &= 0.90244 \end{aligned}$$