PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Soluciones Ayudantías 8, 9 y 10
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ayudantía 8: Ejercicio 3

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0,1)$, esto es,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Halle una función g tal que $Y = g(X)$:

a) tenga una distribución $Exp(\lambda)$.

Sol: En ayudantía encontramos que $g(x) = F_X^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$.

b) tenga una distribución $N(0,1)$.

Sol: La FDA normal no tiene inversa, por lo que podemos usar el TLC. Tomemos $X_1, ..., X_n \sim U(0,1)$. Luego

$$g(X_1, ..., X_n) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \underset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

Donde $\mu = 1/2$ y $\sigma = \sqrt{1/12}$ son la media y desviación estándar de $X \sim U(0,1)$.
Nota: Para ver la generación de distribución exponencial y normal en gráficos, apretar el siguiente link acá .

Ayudantía 8: Ejercicio 5

Considere el amplificador no lineal cuya entrada X y salida Y son relacionados por su característica de transferencia

$$Y = \begin{cases} \sqrt{X} & , \quad X > 0 \\ -\sqrt{|X|} & , \quad X < 0 \end{cases}$$

Halle la función densidad de Y si $X \sim N(0,1)$.

Sol: Usaremos el teorema de transformación con particiones. Notemos que

$$g_1 : y = \sqrt{x} \to g_1^{-1}(y) = y^2$$
$$g_2 : y = -\sqrt{|x|} \to g_2^{-1}(y) = -y^2$$
$$\left|\frac{dg_i^{-1}(y)}{dy}\right| = 2y, \ i = 1, 2$$

Luego

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} \right| \\ &= 2|y|[f_X(y^2) + f_X(-y^2)] \\ &= \frac{|y|}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{1}{2}(y^2)^2} \cdot \mathbb{1}[y < 0] + e^{-\frac{1}{2}(-y^2)^2} \cdot \mathbb{1}[y \geq 0] \right) \\ &= \frac{|y|}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{1}{2}y^4} \cdot \mathbb{1}[y < 0] + e^{-\frac{1}{2}y^4} \cdot \mathbb{1}[y \geq 0] \right) \\ &= \frac{2|y|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^4}, \ y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donde $\mathbb{1}[A](x)$ es la función indicatriz, que vale 1 con $x \in A$, y 0 en otro caso.
Nota: Para ver la generación de la distribución en gráficos, apretar el siguiente link acá

Ayudantía 9: Ejercicio 3

Sean X e Y variables aleatorias continuas con función densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \alpha^2 e^{-\alpha y}$, $0 \leq x \leq y$, $\alpha > 0$. Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes?

Sol: Primero calculamos las marginales. Notar que los límites de integración dependen de x e y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y \alpha^2 e^{-\alpha y} dx = \alpha^2 y e^{-\alpha y} \\ f_X(x) &= \int_x^\infty \alpha^2 e^{-\alpha y} dy = \alpha^2 \cdot \frac{e^{-\alpha y}}{-\alpha} \Big|_{y=x}^{y=\infty} = \alpha e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

Luego vemos que $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, por lo que no son independientes.

Ayudantía 9: Ejercicio 4

Sean $X, Y \sim Geom(p)$ independientes. Sean

$$U = \text{mín}(X,Y), \quad y \quad V = X - Y$$

a) Demuestre que U y V son independientes.
Sol: En ayudantía encontramos que

$$f_{U,V}(u,v) = p^2(1-p)^{2u+|v|-2}, u \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{Z}$$

Podemos notar que se puede separar de la forma $f_U(u) f_V(v)$, pero por formalidad encontremos las marginales:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} p^2(1-p)^{2u+|v|-2} \\ &= p^2(1-p)^{2u-2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} (1-p)^{|v|} \\ &= p^2(1-p)^{2u-2} \left[2\sum_{v=1}^{\infty} (1-p)^v + 1 \right] \\ &= p^2(1-p)^{2u-2} \left[\frac{2(1-p)}{p} + 1 \right] \\ &= p(2-p)(1-p)^{2u-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \sum_{u=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2u+|v|-2} \\ &= p^2(1-p)^{|v|-2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} [(1-p)^2]^u \\ &= p^2(1-p)^{|v|-2} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \\ &= p^2(1-p)^{|v|-2} \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} \\ &= p(1-p)^{|v|} \frac{1}{(2-p)} \end{aligned}$$

Vemos que $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$, por lo que son independientes.

b) Encuentre la distribución de $Z = X/(X+Y)$.

Sol: Primero veamos que los valores posibles de Z son fraciones del tipo $z = r/s$, con $0 < r < s$. Tendremos que $x/(x+y) = r/s$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} &= \frac{r}{s} \\ xs &= xr + yr \\ x(s-r) &= yr \\ \frac{x}{y} &= \frac{r}{s-r} \end{aligned}$$

Por lo que existen infinitos valores de $x, y \in \mathbb{N}$ que forman $x/(x+y) = r/s$. Tomamos entonces $x = kr, y = k(s-r)$, para $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(Z = r/s) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = kr, Y = k(s-r)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = kr)P(Y = k(s-r)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{kr-1} p(1-p)^{k(s-r)-1} \\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^{\infty} [(1-p)^s]^k \\ &= p^2 \frac{(1-p)^{s-2}}{1-(1-p)^s} \end{aligned}$$

c) Encuentre la distribución conjunta de X y $X+Y$.

Sol:

$$\begin{aligned} f_{X,X+Y}(x,t) &= P(X = x, X+Y = t) \\ &= P(X = x, Y = t-x) \\ &= P(X = x)P(Y = t-x) \\ &= p(1-p)^{x-1} p(1-p)^{t-x-1} \\ &= p^2(1-p)^{t-2} \end{aligned}$$

Ayudantía 10: Ejercicio 4

Suponga que X tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$. Definamos $Y = \cos X$. Encuentre $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Sol: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Primero notemos que $\mathbb{E}(X) = 0$, pues $X \sim U(-\pi, \pi)$. Luego, tomando $g(x) = x\cos(x)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) \\ &= \mathbb{E}(X\cos(X)) \\ &= \mathbb{E}(g(X)) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde en la última línea usamos el hecho de que $g(-x) = -x\cos(-x) = -g(x)$ es una función impar, y su integral en intervalos simétricos es 0.