PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 7
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 4

Sea X una variable aleatoria que representa la utilidad en millones de pesos debido a la garantía de cierto componente electrónico. Se sabe que la función densidad de probabilidad de X está dada por

$$f_X(x) = e^{-\theta|x|},\ x \in \mathbb{R},\ \theta > 0$$

a) Determine el valor de la constante θ.

b) Encuentre la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

c) Calcule la utilidad esperada y la varianza asociada a la utilidad.

Sol: Primero veamos la esperanza. Notemos que $f_X(x)$ es una función par: $f_X(-x) = f_X(x)$. Luego $x \cdot f_X(x)$ es impar, por lo que la integral simétrica es 0.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 0$$

Luego $Var(X) = \mathbb{E}(X^2)$. Usamos: $Y = X^2$ y notando que $dx^2 = 2xdx$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{\infty} P(Y \geq y) dy && \text{(Usando un resultado similar a la pregunta 3)} \\
&= \int_0^{\infty} P(X^2 \geq x^2) dx^2 \\
&= 2\int_0^{\infty} (P(X \geq x) + P(X \leq -x)) x dx \\
&= 2\int_0^{\infty} xP(X \geq x) dx + 2\int_0^{\infty} xP(X \leq -x) dx \\
&= 2\int_0^{\infty} x(1 - F_x(x)) dx + 2\int_0^{\infty} xF_X(-x) dx \\
&= 2\int_0^{\infty} x(1 - F_x(x)) dx - 2\int_{-\infty}^{0} xF_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx - \int_{-\infty}^{0} xe^{2x} dx \\
&= \cancel{-x\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_0^{\infty}}^{0} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{2} dx + \cancel{-x\frac{e^{2x}}{2}\Big|_{-\infty}^{0}}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2x}}{2} dx \\
&= 1/4 + 1/4 \\
Var(X) &= 1/2
\end{aligned}$$

d) Para recalcular la garantía de estos componentes es necesario saber aquel valor de la utilidad que permite separar los componentes en dos grupos: en el grupo 1 se encuentran los componentes que están en el 30 % de aquellos que tienen mayor utilidad y en el grupo 2 está todo el resto de los componentes. ¿Cuál es el punto de corte para separar estos dos grupos?

Sol: Se pide el percentil 70. $F_X(x_{70}) = 0{,}7$. Recordemos que

$$F_X(x) = \begin{cases} e^{2x}/2 & x < 0 \\ 1 - e^{-2x}/2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Vemos que en 0, $F_X(0) = 0{,}5$, por lo que sabemos que $x_{70} \geq 0$. Ahora simplemente igualamos

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2x}/2 &= 0{,}7 \\ e^{-2x} &= 0{,}6 \\ x &= -\frac{\ln(0{,}6)}{2} \\ x &\approx 0{,}2554 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Muchos fabricantes tiene programas de control de calidad que incluyen la revisión de defectos en materiales recibidos. Un fabricante de computadoras recibe tarjetas en lotes de 30 de las cuales por experiencia se sabe que exactamente el 10 % son defectuosas. Suponga que el fabricante selecciona de un lote, al azar y sin reposición, 4 tarjetas y defina la variable X como el número de tarjetas defectuosas en la muestra.

a) Determine la función de masa de probabilidad de la variable X.

Sol: Es claro que $X \sim Hipergeom(N = 30, k = 3, n = 4)$. Luego su función de masa es:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{x} \cdot \binom{30-3}{4-x}}{\binom{30}{4}}, \ x = 0, 1, 2, 3$$

b) Un fabricante decide aceptar la partida si a lo más una tarjeta presenta defecto, rechazar la partida si la muestra contiene más de dos tarjetas defectuosas, mientras que si encuentra exactamente 2 tarjetas defectuosas, mezcla bien las 30 tarjetas y vuelve a seleccionar 4 de ellas, el proceso lo repite hasta que toma una decisión de aceptar o rechazar la partida, ¿Cuál es la probabilidad de tomar una decisión después del tercer muestreo?

Sol: Tomemos Y como la cantidad de muestreos necesarios hasta tomar una decisión (aceptar o rechazar). Luego $Y \sim Geom(p)$, donde

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(X = 2) \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{27}{2}}{\binom{30}{4}} \\ &= 0{,}96157 \end{aligned}$$

Luego, tomar una decisión después del tercer muestreo:

$$\begin{aligned} P(Y > 3) &= P(Y \geq 4) \\ &= \sum_{k=4}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1} (1-p)^4 \\ &= p(1-p)^3 \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\ &= (1-p)^3 \\ &= 5{,}67559 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$