PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 3
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 3

Se escoge al azar uno de los cuatro puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,1,1)$. Defina, para $k=1,2,3$:

$$A_k = \{ \text{ la k-ésima coordenada es igual a 1}\}$$

Muestre que los eventos A_1, A_2 y A_3 son independientes por pares pero que no son independientes.
Solución:
$A_1 = \{(1,0,0);(1,1,1)\}$, luego $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$A_2 = \{(0,1,0);(1,1,1)\}$, luego $P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$A_3 = \{(0,0,1);(1,1,1)\}$, luego $P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$A_1 \cap A_2 = \{(1,1,1)\}$, luego $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$.
$A_1 \cap A_3 = \{(1,1,1)\}$, luego $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.
$A_2 \cap A_3 = \{(1,1,1)\}$, luego $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.
Podemos ver que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, para todo par (i,j) con $i \neq j$. Por tanto, los eventos A_1, A_2 y A_3 son independientes por pares.
Por otro lado $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(1,1,1)\}$, luego $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.

Como $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ entonces A_1, A_2 y A_3 no son independientes.

Ejercicio 4

Una caja contiene 5 bolas blancas y 10 bolas negras. Un dado es lanzado. Una cantidad de bolas igual al resultado obtenido en el dado es retirada aleatoriamente de la caja.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las bolas retiradas de la caja sean bolas blancas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido cuando lanzamos el dado haya sido 3 si todas las bolas retiradas de la caja son blancas?

Solución:
A_k: El resultado del dado es k. Para $k = 1, ..., 6$.
B: Las bolas retiradas de la caja son todas blancas.
$P(A_k) = \frac{1}{6}$, $k = 1, ..., 6$
$P(B/A_k) = \frac{C_k^5}{C_k^{15}}$, $k = 1, ..., 5$
$P(B/A_6) = 0$

Entonces, por el teorema de probabilidades totales

$$P(B) = \sum_{k=1}^{6} P(B/A_k)P(A_k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{C_k^5}{C_k^{15}} \frac{1}{6} = 5/66$$

b) Usando probabilidad condicional

$$P(A_3/B) = \frac{P(B/A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{C_k^5}{C_k^{15}} \frac{1}{6}}{\frac{5}{66}} = 22/455$$