Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Modelos Probabilísticos - Ayudantía 2 - Soluciones
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire, Nicolás Mendicoa

Ejercicio 2

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad.

b) Sea $\{A_n : n = 1, 2, ...\}$ una sucesión decreciente de eventos en $\mathcal{A}$, muestre que $P(\cap_{i=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Sol: Supongamos primero que A_n es una sucesión creciente, (es decir, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$) y vamos a demostrar que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_n)$. Luego tomaremos los complementos de A_n para demostrar lo pedido. Ahora definamos

$$B_1 = A_1$$
$$B_n = A_n \setminus A_{n-1},\ n \geq 2$$

Notemos que B_n son disjuntos, y además

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Como lo anterior se cumple para todo n, se tiene

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \tag{2}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

Donde en la primera igualdad usamos (2), en la segunda el axioma 3, en la cuarta la aditividad de disjuntos, en la quinta (1) y en la última el hecho de que A_n son crecientes.

Sea ahora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente, entonces sus complementos son una sucesión creciente $\{A_n^c\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por los resultados anteriores tendremos

$$\begin{aligned} 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) \\ &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad usamos De Morgan. Luego

$$1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Y tenemos lo pedido.

Ejercicio 3

Diez bolas distinguibles son aleatoriamente distribuidas en 10 urnas distinguibles. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente dos urnas estén vacías?

Sol: Si queremos la probabilidad de exactamente dos urnas vacías, entonces debemos repartir las 10 bolas en 8 urnas. Tendremos $\#tot = 10^{10}$ maneras posibles de colocar las bolas. Veamos ahora los casos favorables:

Primero que nada, tendremos $\binom{10}{8}$ maneras de elegir las 8 urnas donde irán las 10 bolas.

Además, tenemos que agrupar las bolas en conjuntos disjuntos, para luego asociarlos cada uno a una urna. Usaremos los números de Stirling de segunda clase, definidos como las distintas maneras de particionar n objetos (bolas) en k conjuntos no vacíos (urnas). Lo representaremos como $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Luego tendremos $\left\{ {10 \atop 8} \right\}$ maneras de generar estas particiones.

Luego, ahora que tenemos estos grupos de bolas, tenemos que buscar las distintas maneras de distribuirlas en las urnas, de tal modo que asignemos un grupo por urna. Similar al ejercicio a), para el primer grupo de bolas, tendremos 8 maneras, pues hay 8 urnas vacías, luego para el segundo grupo de bolas hay 7 maneras y así hasta el octavo grupo, para el cual tendremos solo una urna posible. Es decir tendremos 8! maneras de distribuir estos grupos de bolas, de tal manera de tener cada grupo en una urna.

Finalmente, tendremos que la probabilidad pedida es

$$P = \frac{\binom{10}{8} \cdot \left\{ {10 \atop 8} \right\} \cdot 8!}{10^{10}}$$