PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 11
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 4

El vector aleatorio (X, Y) está definido en el triángulo $OAB, O(0,0), A(0,1), B(1,0)$. Su función de densidad es $f(x,y) = ky^2$, y vale 0 fuera del triángulo. Calcule el coeficiente de correlación entre ambas variables.

Sol: Primero vemos que el triángulo se puede representar por la región $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Lo primero a encontrar es k, integrando en todo el dominio:

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-y} ky^2 \ dx \ dy$$
$$k = 12$$

Veamos las marginales

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 12y^2 dy = 4(1-x)^3, \ \ x \in [0,1]$$
$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 12y^2 dx = 12y^2(1-y), \ \ y \in [0,1]$$

Podemos ver claramente que no son independientes. Luego

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 4(1-x)^3 dx = 1/5$$
$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot 12y^2(1-y) dy = 3/5$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 4(1-x)^3 dx = 1/15$$
$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 12y^2(1-y) dy = 2/5$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1/15 - 1/25 = 2/75$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2/5 - 9/25 = 1/25$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} xy \cdot 12y^2 \ dx \ dy - 1/5 \cdot 3/5 \\ &= 1/10 - 3/25 = -\frac{2}{100}\end{aligned}$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \\ &= \frac{-\frac{2}{100}}{\sqrt{\frac{1}{25} \cdot \frac{2}{75}}} = -0{,}61237\end{aligned}$$