PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 6
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 1

Todos los años, un determinado rio transborda. Suponga que el marcador de límite mínimo de agua está definido en 1 y que el marcador de límite máximo de agua Y tenga la función de distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad 1 \leq y < \infty$$

a) Verifique si $F_Y(y)$ es una fda.

b) Encuentre $f_Y(y)$, la fdp de Y.

c) Si el marcador de límite mínimo de agua fuera redefinido para 0 y usaramos una unidad de medición que sea $\frac{1}{10}$ de la que fue dada anteriormente, el marcador del límite máximo sería $Z = 10(Y - 1)$. Encuentre $F_Z(z)$.

Ejercicio 2

La velocidad de una molecula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria V cuya densidad tiene la forma

$$f(v) = av^2 \exp(-bv^2), \quad 0 < v < +\infty$$

donde $b = m/2kT$ y k, T, y m denota la constante de Boltzmann, la temperatura absoluta, y la masa de la molecula, respectivamente.

a) Use integración por partes y el hecho que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$

para evaluar la constante a.

b) Deduzca la distribución de la energia cinética $W = mV^2/2$ de una molecula.

Ejercicio 3

Sea X con fdp $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2$, $-1 < x < 1$.

a) Encuentre $F_X(x)$.

b) Encuentre una función monótona $u(x)$ de modo que la variable aleatoria $Y = u(X)$ tenga una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

c) Encuentre la fdp de $Z = 1 - X^2$ y muestre que la integración de la fdp es igual a 1.

Ejercicio 4

Suponga que X tenga la fp geométrica $f_X(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, ...$ Determine la distribución de probabilidad de $Y = X/(X+1)$. Note que X y Y son variables aleatorias discretas. Para especificar la distribución de probabilidad de Y, explicite su fp.

Ejercicio 5

Una distribución no puede ser determinada únicamente por una colección finita de momentos, como muestra este ejemplo de Romano y Siegel (1986). Sea X con distribución normal, esto es, X tiene fdp

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Defina una variable aleatoria discreta Y por

$$P(Y = \sqrt{3}) = P(Y = -\sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad P(Y = 0) = \frac{2}{3}$$

Muestre que

$$E(X^r) = E(Y^r), \quad \text{para } r = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(Romano y Siegel indican que para cualquier n finito existe una variable aleatoria discreta y, portanto, no normal, cuyos primeros n momentos son iguales a aquellos momentos de X.)