PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 5
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 1

Suponga que una variable aleatoria X tiene la densidad

$$f(x) = c\left[1 + (x-1)^2\right]^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty$$

a) Halle el valor de c.

b) Escriba la integral que definiría la media de X. ¿Es la integral finita?

Ejercicio 2

Suponga que una variable aleatoria X tiene la distribución Rayleigh con

$$f(x) = 2\theta^{-1} x \exp\left(-x^2/\theta\right) \quad 0 < x < +\infty$$

donde θ es un parámetro positivo.

a) Muestre que $f(x)$ es en realidad una densidad.

b) Deduzca una expresión explícita para la función de distribución $F(x)$.

c) Halle la media y mediana de la distribución.

Ejercicio 3

La velocidad de una molecula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria V cuya densidad tiene la forma

$$f(v) = av^2 \exp(-bv^2), \quad 0 < v < +\infty$$

donde $b = m/2kT$ y k, T, y m denota la constante de Boltzmann, la temperatura absoluta, y la masa de la molecula, respectivamente.

a) Use integración por partes y el hecho que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$

para evaluar la constante a.

b) Deduzca la distribución de la energia cinética $W = mV^2/2$ de una molecula.

Ejercicio 4

Se sabe que las personas llegan a un paradero de manera aleatoria y que, para cada una de ellas, el tiempo que trasncurre desde las 12:00 AM hasta que llega al paradero (en minutos) es una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{60} & , \quad 0 < x < 60 \\ 1 & , \quad x \geq 60 \end{cases}$$

Si con certeza, los buses pasan por este paradero cada 10 minutos a partir de las 12:00 AM, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona deba esperar menos de 5 minutos para la llegada del siguiente bus?