PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 2
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 1

Sean $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ y $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definido por

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{F}$$

Pruebe que P es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$

Ejercicio 2

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

a) Sean A y B en $\mathcal{A}$, pruebe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

b) Sea $\{A_n\,;\, n = 1, 2, ...\}$ una sucesión decreciente de eventos en $\mathcal{A}$, muestre que $P\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Pregunta 3

Diez bolas distingibles son aleatoriamente distribuidas en 10 urnas distingibles. ¿Cuál es la probabilidad que todas las urnas tengan al menos una bola? ¿Cuál es la probabilidad que exactamente dos urnas estén vacías?

Pregunta 4

Los coeficientes a, b, c de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son determinados lanzando un dado tres veces sobre una superficie plana. ¿Cuál es la probabilidad que ambas raices de la ecuación sean reales? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas raices de la ecuación sean complejas?

Pregunta 5

Un punto es aleatoriamente escogido de un disco de radio R. Calcule la probabilidad que el punto esté más cerca al círculo que al centro.

Pregunta adicional 1

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

a) Demuestre que para dos eveentos cualesquiera A_1 y A_2, se tiene que $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

b) Demuestre que para n eventos cualesquiera $A_1, A_2, ..., A_n$ se tiene $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

c) Demuestre que para una sucesión infinita de eventos $A_1, A_2, ...$ se tiene $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Ejercicio adicional 2

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números positivos y $A_1, A_2, ..., A_n$ una partición de Ω. Para todo $A \in \mathcal{A}$ sea

$$Q(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A \cap A_i) / \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)$$

¿Es Q una medida de probabilidad?

Ejercicio adicional 3

Hay n personas en una fiesta de navdad, cada una tiene un regalo. Todos los presentes son colocados en una bolsa y mezclados, luego cada persona toma uno aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno obtenga su propio presente?

Pregunta adicional 4

Dos jugadores, A y B, alternanda e independientemente, lanzan una moneda y el primer jugador que obtiene cara vence. Suponga que el jugador A lanza la moneda primero.

a) Si la moneda es equilibrada, ¿Cuál es la probabilidad de que A venza?

b) Suponga que $P(cara) = p$, no necesariamente $1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que A venza?

c) Muestre que para todo p, $0 < p < 1$, $P(A \text{ vence}) > 1/2$.